СТАЛЬНЫЕ ПОДЪЕМНЫЕ КАНАТЫ

М. Ф. ГЛУШКО

534/33

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ТЕХНИКА»
Киев — 1966

6П4.8
У53

621.86.065.3

3—13—7
220—66М

В книге рассматриваются общие вопросы конструирования и расчета стальных подъемных канатов и изложены основы их инженерного расчета на прочность и устойчивость, а также при работе на блоках и барабанах.

Приведены обобщенные уравнения изгибной жесткости каната, связывающие его продольные и угловые деформации, и приведены ряд новых решений задач о работе шахтных подъемных канатов в прямолинейно-криволинейных направляющих. Особое внимание уделено работе канатов шахтных подъемных установок с двухсторонним контактом и выбору канатов для глубоких шахт.

Представлены исследования поведения канатов при их движении на блоках и барабанах с учетом внутренних контактных сил.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников стахановских заводов, научно-исследовательских и проектных организаций, а также на работников шахтных с эксплуатацией канатов на кранах и лебедках установок, на шахтах и рудниках, студентов горно-механических специальностей высших учебных заведений.

Рецензент канд. техн. наук *О. А. Гонтаев*

Редактор литературы по горному делу *Б. Ф. Гуляев*

Зав. редакцией инж. *Н. Д. Соколова*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стальной канат как гибкий элемент, способный нести высокую растягивающую нагрузку, широко применяется в современной подъемно-транспортной технике. Сейчас трудно себе представить работу многих отраслей народного хозяйства без широкого использования стальных канатов. Это прежде всего относится к горнодобывающей промышленности, где канат является единственным стальным органом, на который возложена вся работа по доставке полезных ископаемых из больших глубин. Работа каната и связанных с ним механизмов во многом зависит от правильности его конструктивного использования, соображений с условиями эксплуатации и точности расчета на прочность.

В силовом расчете каната выделяются две органически связанные, но сильно различаются по своей постановке и методам исследований задачи. Возникает ряд вопросов, связанных с определением общих условий в канате как длинном изгибаемом под действием сложных воздействий статического или динамического характера. Для этого достаточно знания лишь внешних, или интегральных, характеристик каната, таких, как жесткость, длина, масса и т. д. Сама внешняя форма стального каната подчиняется в этом случае одному из расчетов гибкой нити. Поэтому такие задачи решаются интегральной нитью некоторой эквивалентной по внешним свойствам нитью и в общем виде, быть отнесены к внешней механике каната.

Теория гибкой нити во внешней механике каната сыграла свою прогрессивную роль особенно в задачах динамики шахтного подъемного каната. Наибольшие успехи в решении проблемы динамики шахтного подъемного каната достигнуты советскими учеными А. Н. Дмитриевым, Г. П. Савиным, А. С. Лозинским, Н. П. Переловым, Ф. В. Флоринским и др.

Однако задачи внешней механики каната еще не определяют фактического его напряженного состояния. Для этого необходимо иметь сведения о распределении общих усилий между отдельными элементами в канате. Решение этого вопроса требует изучения силового взаимодействия отдельных элементов в канате и построения таким образом внутренней механики работы каната в целом.

Хотя вопросы внутренней механики каната поднимались давно, однако после А. Н. Динника, рассмотревшего с несколько упрощенных позиций задачу простого растяжения каната, существенно нового внесено не было.

В этой связи данная книга представляет собой первую попытку построения цельной теории работы каната в его дискретном представлении как сложного агрегата, вскрывающей весь внутренний механизм его деформирования, охватывающей его прямую ветвь и работу на блоках и барабанах.

Работа канатов на блоках и барабанах рассматривается в общем представлении, безотносительно к отдельным системам подъема. Особое внимание уделяется работе канатов на шахтных многоканатных подъемных установках. С этой точки зрения работа представляет интерес как для инженеров и исследователей, занимающихся расчетом, конструированием и производством стальных канатов, так и для механиков шахт и других эксплуатационных объектов.

В монографии использован материал многих отечественных и зарубежных исследований, и в то же время она представляет собой обобщение работ автора в этой области.

В настоящее время действует ГОСТ 9867—61 на «Единую международную систему единиц», сокращенно называемую СИ. Поскольку новая система единиц еще не вошла настолько широко в инженерную практику, то в данной книге оставлена действующая система единиц МКГСС, а при первом упоминании размерностей величин они в скобках дублируются в системе единиц СИ.

Размерности длины, углов и времени в обеих системах единиц одинаковы, поэтому в наших расчетах в системе СИ войдет в основном размерность единицы силы ньютон — $н = 0{,}102\ кГ$, а также соответственно килоньютон — $кн = 10^3\ н$ и меганьютон — $мн = 10^6\ н$.

Отзывы и пожелания по книге просим направлять по адресу: *Киев, 4, Пушкинская, 28, издательство «Техніка»*.

ВВЕДЕНИЕ

Простейшие образцы металлических канатов известны с давних времен. Так, при раскопках Помпеи были найдены образцы бронзовых канатов, которым насчитывается по меньшей мере 2400 лет [113]. Начало применения канатов из стальной проволоки относится к первой половине XIX столетия. Пеньковые канаты по своей разрывной прочности в то время уже не могли удовлетворить растущие потребности горной техники, что побудило к поискам более прочных материалов для их свивки. Так, в 1834 г. после семилетних испытаний на одном из рудников в Германии в г. Гартце был введен в эксплуатацию первый стальной проволочный канат [101].

Первые образцы стальных канатов были очень примитивны и изготовлялись по образцу пеньковых: из трех прядей, по четыре проволоки в каждой пряди. Предел прочности стальных проволок в то время составлял 40—50 *кГ/мм*²*. Поэтому увеличение грузоподъемности каната в пределах такой примитивной конструкции приводило к большим диаметрам проволок (до 3,5 *мм*). Такой канат обладал низкими эксплуатационными качествами, но все же и в таком виде он имел известные преимущества перед цепями и пеньковыми канатами.

Механизм износа каната состоит из многих факторов. К ним прежде всего относятся растягивающие, изгибные и контактные напряжения, возникающие в канате при огибании блоков и барабанов, его поверхностное абразивное

---

* По ГОСТ 9867—61 эта величина равна 4—5 *кг/мм*².

истирание. Поэтому по мере накопленного опыта дальнейшее совершенствование конструкции стальных канатов шло по пути увеличения заполнения кругового контура его поперечного сечения металлом, выбора оптимального диаметра и количества проволок. Совершенствовалось его геометрическое построение с целью уменьшения внутренних и внешних контактных напряжений и максимального увеличения его внешней опорной поверхности.

В различных условиях эксплуатации различные факторы износа проявляются по-разному, и поэтому расширение области применения стальных канатов различные за собой появление большого разнообразия их конструктивных форм, максимально удовлетворяющих различным специфическим требованиям их эксплуатации.

Конструкции стальных канатов и технологии их производства продолжают непрерывно совершенствоваться, однако основные структурные признаки канатов, заключающиеся в их винтовой свивке, остаются неизменными. Другие возможные способы свивки или плетения в стальных канатах не применяются прежде всего потому, что только посредством винтовой свивки обеспечивается наибольшее заполнение контура поперечного сечения каната металлом и достигается линейный контакт между проволоками.

Важным фактором, определяющим конструктивное оформление каната и во многом его эксплуатационные свойства, является его геометрическое построение. Свивка только трех или четырех одинаковых круглых проволок не вызывает особых сомнений в успехе этой операции. Однако построение многослойных прядей с линейным касанием проволок приводит уже к довольно сложной геометрической задаче.

Поэтому на первых же этапах развития канатного производства возникли задачи их правильного геометрического построения. Конечно, связанные с этим производственные вопросы решались в основном опытом: путем грубого расчета и дальнейшего подбора параметров свивки. Отсутствие достаточно точных предварительных геометрических расчетов сдерживало дальнейшее развитие канатного производства.

История развития геометрической задачи начинается с весьма грубых приближений К. Ю. Милковского [64], И. Грабака [109], И. И. Амитина [1], не учитывающих

действительной формы проволок в поперечном сечении каната. Первое решение этой задачи, построенное на соприкосновении эллиптических сечений проволок, принадлежит П. П. Нестерову [69]. В более поздней работе Д. Г. Житкова [47] по существу повторяются формулы П. П. Нестерова. Точная форма сечения проволоки в канате, отличающаяся от эллипса, была найдена в последующей совместной работе П. П. Нестерова и Г. И. Иозефа [51]. Дальнейшее развитие этих исследований [49, 50, 51] приводит к созданию более надежных методов геометрического построения канатов. С. Д. Пономарев [78] при рассмотрении аналогичной задачи для витых пружин исходит из постоянства расстояния между винтовыми осями соприкасающихся проволок, не касаясь формы их наклонного сечения. Этот принцип позволяет найти более общее решение задачи о геометрии свивки канатов. В результате этих исследований геометрическая теория круглых канатов и прядей находит свое общее логическое завершение, не исключая, конечно, необходимости в дальнейшей систематизации, обобщении и развитии отдельных вопросов. Геометрическая теория фасонных прядей и закрытых канатов, рассматриваемая в отдельных работах [52, 53], находится пока в стадии разработки.

Развитие теории силового расчета стальных канатов также имеет свою давнюю историю.

Общепринятым в настоящее время является статический расчет канатов по максимальному растягивающему усилию T с учетом суммарного разрывного сопротивления всех проволок в канате P_c. При этом величина

$$m = \frac{P_c}{T}$$

называется условным расчетным статическим запасом прочности каната.

Величина запаса прочности в зависимости от типа и назначения подъемного механизма колеблется в весьма широких пределах — от четырех или даже от полутора до девяти и более. Разумеется, что этот расчет совершенно не учитывает всей сложности конструкции каната и действительной картины возникающих в нем напряжений и поэтому носит условный характер.

При одном и том же значении запаса прочности различные конструкции канатов в одинаковых условиях,

вообще говоря, имеют различный срок службы. Это значит, что действительные напряжения в канате тесно связаны с его конструкцией и для их определения одной величины m недостаточно.

Неполноценность расчета канатов по условному статическому запасу прочности давно побудила инженерную мысль к разработке более совершенной теории. Такая теория необходима как для правильного выбора типа канатов в зависимости от условий эксплуатации, так и для дальнейшего совершенствования их конструкций.

В процессе эксплуатации канат испытывает растяжение статического или динамического характера, изгиб на шкивах и барабанах с одновременной контактной нагрузкой, а в ряде случаев скручивание, вызванное внешним или внутренним крутящим моментом.

Исследование задачи простого растяжения каната впервые встречается у Бендорфа [102] и Г. А. Чоповского [100], которое в этом же аспекте завершается акад. А. Н. Динником [42]. Эту теорию часто называют теорией Бендорфа — Динника. В своей постановке теория сводится к изучению растяжения симметричного пучка прямых проволок, наклоненных под углом α к оси каната. В качестве условия совместности деформаций проволок принята гипотеза плоских сечений.

Напряжения растяжения в i-той проволоке стального спирального каната получают следующее выражение:

$$\sigma_i = T \frac{\cos^2 \alpha_i}{\sum F_i \cos^3 \alpha_i},$$

где F — площадь поперечного сечения проволоки;

T — осевое усилие в канате.

Для каната двойной свивки

$$\sigma_i = T \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sum F_i \cos^3 \alpha_i \cos \beta_i},$$

где β — угол свивки прядей в канат.

Жесткость каната при растяжении

$$\Lambda = (EF)_k = \sum E_i F_i \cos^3 \alpha_i \cos^3 \beta_i,$$

где E_i — модуль упругости материала проволок.

При некоторых упрощениях модуль упругости каната по А. Н. Диннику получает следующее выражение:

$$E_k = E \cos^4 \alpha \cos^4 \beta.$$

Здесь α и β — средние углы свивки: для спирального каната $\beta = 0$.

Сравнивая результаты своих вычислений с многочисленными опытными данными, А. Н. Динник показал, что в среднем эти формулы дают ошибку -5% для спиральных канатов и $+10\%$ для канатов двойной свивки.

Одним из недостатков рассмотренной теории является то, что она не учитывает поперечного сужения каната. Бендорфом и Чоповским показано, что в спиральных канатах суженнем при растяжении вследствие эффекта Пуассона и контактного обмятия проволок можно пренебречь, так как ошибка в значении напряжений при этом не превышает 5%. Аналогичные формулы для растяжения каната встречаются также и в ряде других работ [108].

Однако эта теория остается приближенной по тем соображениям, что здесь остаются неучтенными напряжения вследствие изгиба и кручения проволок. Предпосылки для учета этих факторов в канате с линейным контактом проволок дает работа Берга [103]. Однако уравнения Берга содержат неизвестную контактную силу, которая не определяется из уравнений статики. Берг не раскрывает статической неопределимости задачи, которая остается до конца не решенной.

В практике канат часто работает на совместное растяжение и кручение. В этой связи заслуживает внимания статья Дреера [105], который так же, как и Бендорф, исходит из простых геометрических соображений и дополняет расчет введением угла скручивания каната. Однако выводы Дреера не отличаются необходимой общностью и строгостью. Поскольку здесь рассмотрен более общий случай, то решение Бендорфа — Динника, полученное аналогичным путем для простого растяжения, должно вытекать из него как частное, чего, к сожалению, из формул Дреера получить нельзя.

Наибольший интерес представляет теория кручения тросов многожильных пружин сжатия С. Д. Пономарева [78]. Однако эта теория не может быть безоговорочно перенесена на проволочные канаты в силу некоторых их конструктивных особенностей.

Стальной канат представляет собой сложную, статически неопределимую стержневую систему, в общем поддающуюся расчету методами строительной механики. Расчет прямого каната как стержневой конструкции при

совместном растяжении и кручении с применением методов строительной механики впервые рассмотрен в работах автора [7, 8, 9, 10]. Применение этих методов привело к формулировке обобщенных уравнений статики каната:

$$A\frac{du}{dx} + C\frac{dv}{dx} = T;$$

$$C\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} = M,$$

где A, B и C — обобщение коэффициента жесткости каната;

u и v — продольное и угловое перемещения его плоских поперечных сечений;

T и M — осевое усилие и крутящий момент в канате;

x — координата оси каната.

Получены также выражения для деформаций и усилий в отдельных элементах каната через его агрегатные деформации du/dx и dv/dx.

Эти выражения дают представление об агрегатных механических свойствах каната уже как о системе с двумя степенями свободы.

Применением этих уравнений впервые было доказано существование значительных деформаций кручения шахтных подъемных канатов под действием собственного веса, что существенно изменило представление о их напряженном состоянии [7, 10, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

В работе шахтного подъемного каната значительную роль играют динамические напряжения. История развития и современное состояние динамики шахтных подъемных канатов изложены в работах Г. Н. Савина и Ф. В. Флоринского [82, 95], а с учетом переменной длины каната — в монографии Г. Н. Савина и О. А. Горошко [83].

Динамическая теория каната до сих пор строилась на представлении его как упругой или упруговязкой нити с учетом только продольных колебаний.

Вывод обобщенных уравнений статики каната при растяжении и кручении позволил впервые записать динамические уравнения совместных продольно-крутильных колебаний каната в такой форме:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x} + C\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где t — время;

ρ — линейная плотность;

m — линейный кинетический момент инерции каната.

Влияние крутильных колебаний открывает ряд существенно новых явлений в динамике шахтного подъемного каната [11, 12, 13] по сравнению с его моделью в виде сплошной нити.

Кроме механических воздействий на прямую ветвь, канат испытывает изгиб на блоках и барабанах. Возникающие при этом напряжения в некоторых случаях играют решающую роль в разрушении каната.

Теория изгибных напряжений в канатах имеет более раннюю историю и исходит из формулы Рело (1861 г.)

$$\sigma_и = E\frac{\delta}{D},$$

которая определяет изгибные напряжения в несвитой проволоке диаметром δ, изгибаемой на блоке диаметром D. В сущности эта формула не представляет ничего нового по сравнению с теорией изгиба круглого бруса, известной из сопротивления материалов. Поэтому для учета свивки проволок несколько позже был введен поправочный коэффициент:

$$\sigma_и = kE\frac{\delta}{D}.$$

Величина поправочного коэффициента k на протяжении долгих лет является предметом дискуссии. Различные авторы дают для него самые различные значения, обоснованные зачастую недостаточно убедительными соображениями. Заслуживающими внимания теоретическими выражениями этого коэффициента следует считать формулу Гауэра [101]

$$k = \cos\alpha\cos\beta,$$

предложенную в 1871 г., и формулу М. М. Федорова [93]

$$k = \cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

В наиболее общей постановке вопрос изгибных напряжений рассмотрен Г. П. Ждановым [44, 45, 46]. С помощью ряда предположений, основным из которых является гипотеза плоских сечений, Г. П. Жданов находит уравнение оси проволоки и ее кривизну в изогнутом канате. Для

прямого каната такие зависимости были получены Б. Д. Тиховидовым [91].

Деформации изгиба проволоки получаются как разность векторов кривизны проволоки в изогнутом и прямом канате. Выражения для деформаций и напряжений получены Г. П. Ждановым только для двух точек упругой линии проволоки. Полученные результаты, по признанию их автора, дают удовлетворительное совпадение с опытом только в ограниченной области.

Более общую и математически компактную теорию изгибных напряжений позволяет построить метод кинематической аналогии [15, 16, 17], однако при этом еще не учитывается силовое взаимодействие элементов каната.

Основы силовой теории изгиба канатов изложены в работе автора [14]. Кроме основных напряжений в канате, существенную роль на его работоспособность оказывают краевые эффекты, связанные с несовершенством закрепления его концов, сопровождающиеся неравномерным натяжением его элементов и концентрацией местных напряжений. Такой эффект неизбежно возникает в области набегания каната на блок, где вследствие резкого изменения его кривизны возникают большие смещения его элементов. Возникающие при этом местные напряжения в канате рассматриваются в работах С. Т. Сергеева [87, 88, 89].

В некоторых инженерных задачах достаточно ограничиться рассмотрением каната как статической стержневой системы, в общем поддающейся расчету методами строительной механики. Однако в отличие от обычных стержневых систем, рассматриваемых в строительной механике, канат обладает той существенной особенностью, что все его элементы взаимно контактируют по длине и только благодаря этому они работают совместно, сохраняя структурную целостность. Это накладывает свои особенности на его расчет, вследствие чего данную часть общей теории работы каната мы вправе обособить как строительную механику каната.

Как результат обобщения и развития работ [7, 8, 9, 15, 16], в статье Г. Н. Савина и М. Ф. Глушко [33] на основании уравнений Кирхгофа для тонких стержней впервые сформулированы общие уравнения строительной механики стального каната при произвольной действующей на него нагрузке.

Однако было бы недостаточно рассматривать канат только как некоторую статическую стержневую систему. Работа каната на блоках отличается большими относительными смещениями его элементов, что заставляет рассматривать его в движении уже как некоторый механизм, состоящий из упруго податливых элементов с контактными кинематическими связями и силами трения. Таким образом, в канате мы встречаем сочетание свойств деформируемой стержневой системы и механизма с контактными кинематическими связями, а отсюда вытекают все особенности в теоретическом описании его работы. В связи с этим возникает проблема построения общей теории работы каната, задача которой состоит в том, чтобы определить усилия и деформации в канате в целом и в отдельных его элементах не только в некотором его статическом состоянии, но и в процессе их изменения во времени и по длине каната при работе его на блоках и барабанах.

Большую роль в работе каната играют внутренние силы трения. Их влияние как диссипативных сил приводит к тому, что в отличие от идеально упругой системы многие процессы в канате, связанные с относительным смещением его элементов, носят необратимый характер. Накопление необратимых процессов в канате приводит к остаточным нарушениям его структуры в виде расслоения, волнистости и т. д.

Изучение этих явлений требует уже рассмотрения работы каната с учетом накопления всех изменений в нем в процессе эксплуатации. В этом направлении в литературе пока не имеется сколько-нибудь серьезных трудов, вскрывающих природу этих явлений, кроме работ описательного характера.

Большую роль в инженерной практике играет расчет каната на долговечность, который строится пока на чисто эмпирических данных. К наиболее важным работам, касающимся крановых канатов, следует отнести исследования Д. Г. Житкова [47], К. М. Масленникова [63], Б. С. Ковальского [56, 57, 58], результаты которых во многом подтверждаются опытом. То, что эти методы еще не нашли широкого применения в инженерной практике, можно объяснить недостаточностью экспериментальных и статистических данных.

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1

ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ ФОРМЫ СТАЛЬНЫХ КАНАТОВ

В настоящее время имеется большое разнообразие конструкций стальных канатов, однако по принципу построения они сводятся к нескольким основным конструктивным формам.

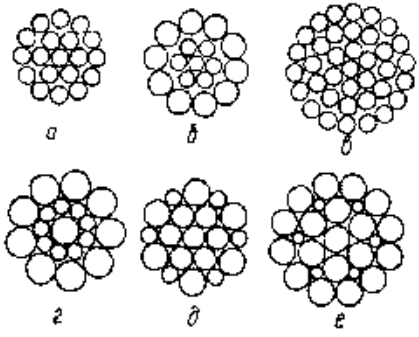


Рис. 1. Спиральные канаты и пряди: *а, б, в* — пряди с точечным касанием проволок; *г, д, е* — пряди с линейным касанием проволок

Канаты различаются, прежде всего, порядком их свивки. Стальные проволоки могут быть свиты между собой один раз, что приводит к образованию так называемого спирального каната, возможные поперечные сечения которого показаны на рис. 1. Затем эти спиральные канаты (пряди) могут быть свиты снова в канат, в результате чего получаем канат двойной свивки (рис 2).

Продолжая этот процесс дальше, можно получить в принципе канат любого порядка свивки. Однако с увеличением порядка свивки каната уменьшается степень заполнения его поперечного сечения металлом, ухудшается его поверхность. Поэтому в технике применяются преимущественно канаты двойной свивки.

При свивке проволок по слоям в прядях с различным независимым шагом соприкосновение слоев проволок получается точечным. Если шаг свивки смежных слоев проволок одинаков, то контакт между ними линейный. В стандартах на стальные канаты пряди с точечным касанием проволок принято обозначать сокращению ТК, с линейным — ЛК.

В многослойной пряди возможна комбинация обоих вариантов свивки, когда часть слоев имеет точечный, а

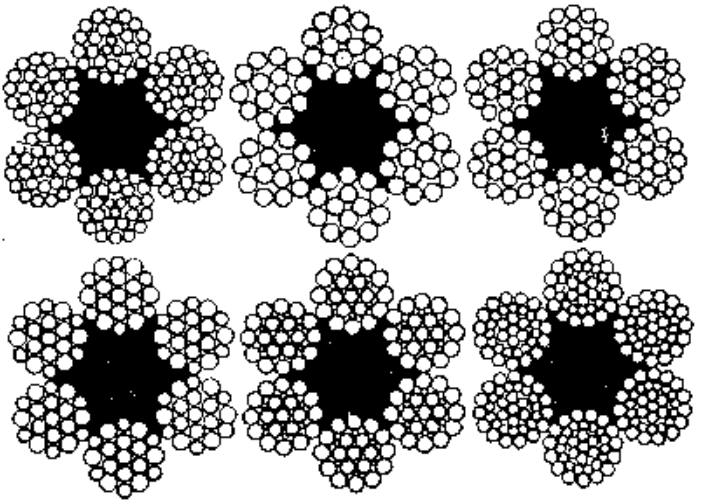


Рис. 2. Круглопрядные канаты.

часть — линейный контакт; получается точечно-линейный контакт (ТЛК).

Конструкция спиральных канатов и прядей условно обозначается в литературе рядом чисел, равных числу проволок по слоям, начиная от центра, с указанием характера свивки.

Если проволоки в слое имеют различный диаметр, то выделяют число проволок каждого диаметра чертой дроби: $1 + 6 + 6/6$.

Часто под числом проволок в виде дроби пишется их диаметр в миллиметрах; тогда числа проволок разных

диаметров в одном слое удобнее обозначать через их произведение, например:

$$\frac{1}{1{,}1} + \frac{6}{1{,}0} + \frac{6}{0{,}8} \cdot \frac{6}{1{,}1}.$$

В дальнейшем знаком плюс или минус перед числом проволок будем указывать их свивку относительно какого-то выбранного положительного направления, например: $1 + 6 + 12 - 18$; $1 - 6 - 12 + 18$ и т. д.

В прядях с точечно-линейным контактом проволок их слои, свитые с линейным касанием, как имеющие всегда одинаковое направление свивки, будем брать в скобки, например: $(1 + 6) \pm (10 + 10)$; $(1 + 6) \pm (15 + 15)$.

Канат двойной свивки обозначается произведением числа прядей на число проволок в прядях с указанием вида сердечника: органический (о. с.) или металлический (м. с.). Так, например, $6 \times 19 +$ о. с.; $6 \times 37 +$ м. с. и т. д.

Часто в технической литературе дают полную характеристику прядей, например: $6 \times (1 + 6 + 6/6) +$ о. с. или (с указанием диаметра проволок) $6 \times \left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{6}{1{,}0} + \frac{6}{0{,}8} \times \times \frac{6}{1{,}1}\right) +$ о. с. Совершенствуя эту систему обозначений, как и для спиральных канатов, будем обозначать направление свивки проволок в прядях. Направление свивки прядей в канате будем считать положительным, причем центральная проволока будет всегда иметь также положительное направление свивки. Направление свивки остальных проволок будет определено знаком перед их числом.

Так, например, канат односторонней свивки будет иметь такое обозначение: $6 \times (1 + 6 + 6/6) +$ о. с. Для того же каната крестовой свивки получим: $6 \times (1 - 6 - 6/6) +$ о. с. В случае смешанной свивки, например для каната $6 \times 37 +$ о. с., его конструкция в общем виде запишется так: $6 \times (1 \pm 6 \pm 12 \pm 18) +$ о. с.

Для канатов ТЛК введем для обозначения прядей квадратные скобки, а слои проволок в пряди с линейным касанием будем брать в круглые скобки, например:

$$7 \times \left[(1 + 6) \pm \left(7 + 7/7\right) \pm 18\right] +$$ о. с.

Все вышеизложенное относится к однослойному канату. В многослойном канате слои прядей обозначаются таким же образом, но перед обозначением каждого слоя будем ставить знак направления свивки его прядей по отношению к наружному слою. Запись будем вести, начиная с внешнего слоя прядей, имеющего принятое положительное направление свивки. Так, например, для двухслойного каната, состоящего из 12 наружных прядей ТК типа $1 + 6 + 12$ и 6 внутренних прядей такого типа, в общем случае можно записать: $12 \times (1 \pm 6 \pm \pm 12) \pm 6 \times (1 \pm 6 \pm 12) + о.\ с.$

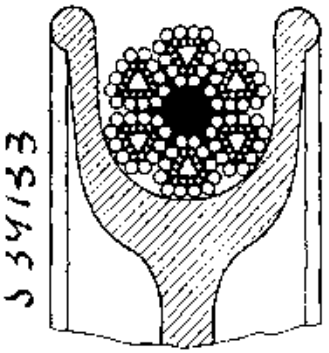


Рис. 3. Контакт со шкивом фасонных прядей.

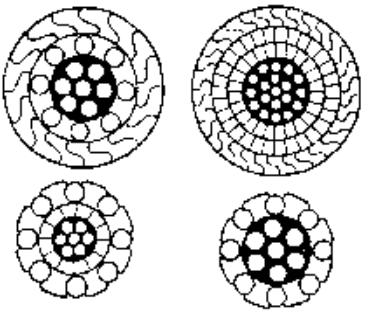


Рис. 4. Спиральные канаты закрытой и полузакрытой конструкции.

Поиски в направлении увеличения опорной поверхности и степени заполнения поперечного сечения каната металлом в пределах наиболее простой его однослойной конструкции привели к созданию фасонопрядных канатов (рис. 3). Пряди в таком канате имеют фасонный профиль, чаще всего близкий к трехгранному или эллипсовидный (овальный).

Спиральные канаты по сравнению с канатами двойной свивки обладают большей металлоемкостью и большей опорной поверхностью, но их применение ограничивается тем, что оборванные проволоки легко выплетаются из каната, что препятствует дальнейшей его работе.

В стремлении избавиться от этого недостатка возможны конструкции так называемых закрытых и полузакрытых спиральных канатов (рис. 4).

§ 2

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Ось проволоки в спиральном канате представляет собой обыкновенную винтовую линию s на круговом базисном цилиндре (рис. 5). Винтовая линия s пересекает образующие цилиндра под постоянным углом свивки α. Такую же винтовую форму имеет ось пряди в канате двойной свивки. Проволока в пряди при этом имеет более сложную пространственную форму. Многие геометрические и силовые расчеты для проволоки в спиральном канате и для пряди в канате двойной свивки связаны лишь с формой их винтовой оси и имеют общий характер. Поэтому для канатов удобно ввести обобщенное понятие основного элемента, ось которого имеет форму обыкновенной винтовой линии независимо от порядка его свивки. В спиральном канате основным элементом является проволока, в канате двойной свивки — прядь и т. д.

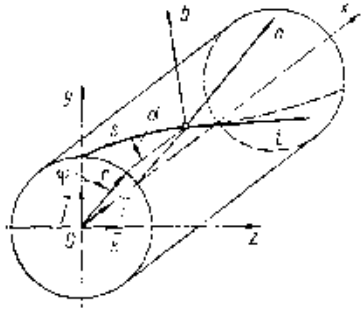


Рис. 5. Выбор систем координат.

Введем систему декартовых координат x, y, z так, что ось x совпадает с осью каната, а оси y, z расположатся в его поперечном сечении. В поперечном сечении каната введем полярные координаты r, φ (рис. 5). Единичные орты осей x, y, z обозначим соответственно через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

При этом уравнение винтовой линии s в параметрической форме запишется так:

$$x = r\varphi \operatorname{ctg} \alpha; \quad y = r \cos \varphi; \quad z = r \sin \varphi. \tag{I.1}$$

Длина цилиндра $x = h$, на которой винтовая линия совершает один полный оборот вокруг его оси, равна шагу винтовой линии

$$h = 2\pi r \operatorname{ctg} \alpha, \tag{I.2}$$

который в канатах называется шагом свивки.

На практике легче всего измерять радиус r и шаг свивки каната h, по которым находится угол свивки из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi r}{h}. \qquad (1.3)$$

Кроме того, для длины дуги винтовой линии можно записать:

$$s = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{r\varphi}{\sin\alpha}. \qquad (1,4)$$

Часто в расчет вводят кратность свивки как отношение шага свивки к внешнему диаметру каната:

$$k = \frac{h}{d}.$$

По существующему в настоящее время стандарту на стальные канаты (ГОСТ 3241—55) кратность свивки прядей ТК не должна превышать 11, для прядей ЛК — не больше 10, для канатов 7,5. Поскольку кратность свивки k есть безразмерный параметр, то однотипные пряди и канаты, свитые с одинаковой кратностью, будут всегда геометрически подобны.

Для ряда геометрических и силовых расчетов, кроме полярных и декартовых координат, удобно ввести систему подвижных координат b, n, t, связанных с винтовой осью основного элемента каната так, что ось t является касательной к винтовой оси, ось n является продолжением полярного радиуса r в данной точке, а ось b нормальна к первым двум так, что трехгранник b, n, t образует правую систему координат. Единичные орты осей обозначим соответственно $\bar{b}$, $\bar{n}$, $\bar{t}$.

Пользуясь известными зависимостями из аналитической геометрии, при заданных углах α и φ можно найти направляющие косинусы осей b, n, t в системе координат x, y, z, которые сведены в табл. 1.

В дальнейшем направляющие косинусы векторов к осям x, y, z будем обозначать через k, l, m, снабдив их соответствующими индексами.

Трехгранник b, n, t является подвижным в том смысле, что при движении вдоль линии s он поворачивается, его ориентация изменяется вследствие изменения полярного угла φ.

КНИГОСКОПИ

Таблица 1

Параметры для расчета канатов

Подвижные координаты	x	y	z
b	$\sin\alpha$	$\cos\alpha\sin\varphi$	$-\cos\alpha\cos\varphi$
n	0	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
t	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha\sin\varphi$	$\sin\alpha\cos\varphi$

§ 3

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО КОНТАКТА ПРОВОЛОК

Если две проволоки, свитые в прядь, непрерывно соприкасаются друг с другом по линии, то, очевидно, расстояние между их винтовыми осями будет везде постоянным и равным полусумме их диаметров. Найдем аналитическое выражение этого условия линейного контакта проволок.

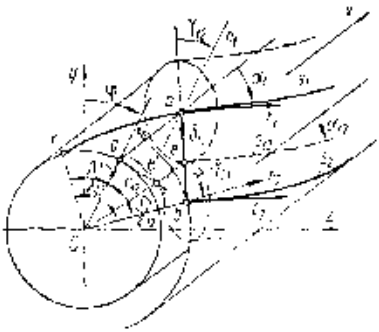


Рис. 6. К построению линейного контакта проволок.

На рис. 6 показаны винтовые оси s_1 и s_2 двух линейно контактирующих проволок с параметрами свивки соответственно r_1, α_1 и r_2, α_2. Диаметры проволок обозначим соответственно через δ_1 и δ_2. Расстояние δ_{12} между точками a и b, расположенными на общей нормали к винтовым линиям, равно полусумме диаметров проволок:

$$\delta_{12} = ab = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}.$$

Кроме того, отрезок ab должен быть перпендикулярен касательным t_1 и t_2 к рассматриваемым винтовым линиям.

В результате условия линейного контакта рассматриваемых проволок символически запишутся так:

$$ab = \delta_{12};\ \delta_{12} \perp t_1;\ \delta_{12} \perp t_2. \qquad (I.5)$$

Длина отрезка ab через его проекции на оси координат x, y, z запишется так:

$$\delta_{12}^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2. \qquad (I.6)$$

Направляющие косинусы этого отрезка:

$$k_\delta = \frac{\delta_x}{\delta_{12}};\ l_\delta = \frac{\delta_y}{\delta_{12}};\ m_\delta = \frac{\delta_z}{\delta_{12}}. \qquad (I.7)$$

Если через k_1, l_1, m_1 и k_1', l_1', m_1' обозначить направляющие косинусы соответствующих касательных t_1 и t_2, то вторые два условия из выражения (I.5) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} k_\delta k_1 + l_\delta l_1 + m_\delta m_1 &= 0; \\ k_\delta k_1' + l_\delta l_1' + m_\delta m_1' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (I.8)$$

Полярные углы точек a и b, отличающиеся на некоторый угол ε_{12}: $\varphi_a = \varphi$; $\varphi_b = \varphi + \varepsilon_{12}$. Поэтому, беря разность координат этих точек, находим проекции отрезка ab:

$$\left.\begin{aligned} \delta_x &= x_a - x_b = x_{12}; \\ \delta_y &= y_a - y_b = r_1 \cos\varphi - r_2 \cos(\varphi + \varepsilon_{12}); \\ \delta_z &= z_a - z_b = r_1 \sin\varphi - r_2 \sin(\varphi + \varepsilon_{12}). \end{aligned}\right\} \qquad (I.9)$$

При этом уравнение (I.6) перепишется так:

$$\delta_{12}^2 = x_{12}^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\varepsilon_{12}. \qquad (I.10)$$

Эта формула совпадает с уравнением Г. И. Иозефа [51], найденным из условия касания контуров наклонных сечений геликоидальных поверхностей проволок в поперечном сечении каната.

Направляющие косинусы касательных t_1 и t_2 определяются табл. I соответственно для углов α_1, φ и α_2, $\varphi + \varepsilon_{12}$. Пользуясь этими данными и выражениями (I.7), (I.8) и (I.9), находим из первого уравнения:

$$x_{12} = r_2 \operatorname{tg}\alpha_1 \sin\varepsilon_{12}; \qquad (I.11)$$

из второго уравнения:

$$x_{12} = r_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \sin\varepsilon_{12}. \qquad (I.12)$$

Сравнение этих выражений дает уравнение

$$r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 = r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2, \tag{1.13}$$

которому согласно формуле (1.2) соответствует равенство шагов свивки линейно контактирующих проволок.

Полученные уравнения содержат неизвестный вспомогательный угол ε_{12}, который находится из следующих соображений. Линии s_1 и s_2 пересекают поперечное сечение каната в точках c и b, расположенных под полярным углом $\lambda_{12} = \angle cob$, который будем называть полярным углом контакта. Этот угол в сечении каната находим следующим образом. Полярный угол, соответствующий дуге cd,

$$\beta = \lambda_{12} - \varepsilon_{12}.$$

Тогда из треугольника acd находим:

$$x_{12} = r_1 \beta \operatorname{ctg} \alpha_1 = r_1 (\lambda_{12} - \varepsilon_{12}) \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Наконец, сравнивая это выражение с (1.12), получаем трансцендентное уравнение относительно искомого угла:

$$\varepsilon_{12} = \lambda_{12} - \sin \varepsilon_{12} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2. \tag{1.14}$$

Это уравнение может быть решено путем последовательных приближений. Принимая во внимание малость угла β в реальных конструкциях прядей и канатов, можно найти удовлетворительное приближение решения этого уравнения следующим образом. Приравнивая $\beta \approx \sin \beta$, уравнение (1.14) можно записать так:

$$\sin (\lambda_{12} - \varepsilon_{12}) = \sin \lambda_{12} \cos \varepsilon_{12} - \cos \lambda_{12} \sin \varepsilon_{12} = \\ = \sin \varepsilon_{12} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{ctg} \varepsilon_{12} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - \cos \lambda_{12}}{\sin \lambda_{12}}. \tag{1.15}$$

Второй член в правой части уравнения (1.14) мал по сравнению с первым. Поэтому в качестве первого приближения можно брать $\varepsilon_{12} = \lambda_{12}$ и затем по уравнению (1.14) находить любое приближение для угла ε_{12}. Расчеты показывают, что формула (1.15) при этом дает сразу третье или четвертое приближение. Поэтому решение (1.15) уравнения (1.14) можно считать практически точным.

Таким образом, для целей построения (синтеза) конструкций спиральных канатов (прядей) с линейным контактом проволок мы имеем уравнения (I.10), (I.13) и (I.14) или (I.15). Исключая вспомогательный угол ε_{12} посредством (I.15), получим уравнение (I.10) с шестью неизвестными: δ_1, δ_2, r_1, r_2 и α_1, α_2. Посредством уравнения (I.13) исключается еще одно неизвестное. Остальные пять неизвестных частью должны быть заданы, а частью — найдены из других конструктивных соображений.

На практике иногда приходится решать задачу совместного линейного контакта для трех, четырех, а иногда и большего числа проволок. Это приводит к необходимости решения системы уравнений типа (I.10). Поэтому полученные уравнения удобно символически обобщить на случай контакта i-й и k-й проволок. Это дает следующий комплекс синтезирующих уравнений.

Основное уравнение линейного контакта

$$\delta_{ik}^2 = \left(\frac{\delta_i + \delta_k}{2}\right)^2 = \Phi_{ik}, \tag{I.16}$$

где

$$\Phi_{ik} = x_{ik}^2 + r_i^2 + r_k^2 - 2r_i r_k \cos\varepsilon_{ik}; \tag{I.17}$$

$$x_{ik} = r_i \operatorname{tg}\alpha_k \sin\varepsilon_{ik} = r_k \operatorname{tg}\alpha_i \sin\varepsilon_{ik}. \tag{I.18}$$

Вспомогательные уравнения имеют следующий вид:

$$r_i \operatorname{ctg}\alpha_i = r_k \operatorname{ctg}\alpha_k = \frac{h}{2\pi}; \tag{I.19}$$

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_{ik} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_k + \cos\lambda_{ik}}{\sin\lambda_{ik}}. \tag{I.20}$$

В целях силового анализа контакта необходимо знать радиус r_{12} (рис. 6), на котором расположена линия контакта s_{12} и ее угол наклона α_{12}. Для этого точку контакта e проектируем на плоскость (y, z) поперечного сечения каната в положение e'. Тогда проекции радиуса r_{12} на оси координат y и z равны сумме проекций радиуса r_2 и направленного отрезка $\overrightarrow{be'}$. Проекция отрезка $\overrightarrow{be'}$ равна проекциям отрезка $\overrightarrow{be}$, длина которого равна $\delta_2/2$, и направляющие косинусы определены выражениями (I.7) и (I.9). Отсюда в обобщенных символах находим

проекции радиуса контакта r_{ik} в следующем виде:

$$y_{ik} = r_k \cos(\varphi + \varepsilon_{ik}) + \frac{b_k}{2} l_k; \; z_{ik} = r_k \sin(\varphi + \varepsilon_{ik}) + \frac{b_k}{2} m_k.$$

Отсюда определяется величина радиуса контакта

$$r_{ik} = \sqrt{y_{ik}^2 + z_{ik}^2} = \frac{\sqrt{(r_i b_k)^2 + (r_k b_i)^2 + 2 b_i b_k r_i r_k \cos \varepsilon_{ik}}}{b_i + b_k}. \qquad (1.21)$$

Тангенс угла наклона линии контакта находится по общей формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha_{ik} = \frac{2\pi r_{ik}}{h}.$$

Контактная сила направлена вдоль отрезка ab, поэтому ее направляющие косинусы равны (1.7) и в соответствии с (1.9), (1.11) и (1.12) запишутся в обобщенных символах:

$$\left.\begin{aligned} k_p &= \frac{r_k}{b_{ik}} \sin \varepsilon_{ik} \operatorname{tg} \alpha_i; \\ l_p &= \frac{r_i}{b_{ik}} \cos \varphi - \frac{r_k}{b_{ik}} \cos(\varphi + \varepsilon_{ik}); \\ m_p &= \frac{r_i}{b_{ik}} \sin \varphi - \frac{r_k}{b_{ik}} \sin(\varphi + \varepsilon_{ik}). \end{aligned}\right\} \qquad (1.22)$$

Кроме того, нас интересует направление контактной силы не только в системе координат x, y, z, но и в поперечном сечении проволок. Это направление может быть охарактеризовано углами γ_{12} и γ_{21} (рис. 6), которые образует отрезок ab с направлениями осей n_1 и n_2, являющимися продолжением полярных радиусов в этих точках. Косинус любого из этих углов находится как сумма произведений одноименных направляющих косинусов из выражения (1.22) и направляющих косинусов радиусов r_1 или r_2.

В общем виде это приводит к выражению:

$$\cos \gamma_{ik} = 2 \frac{r_i - r_k \cos \varepsilon_{ik}}{b_i + b_k}. \qquad (1.23)$$

Для определения γ_{ki} в формуле (1.23) индексы i и k следует поменять местами и изменить знак на обратный,

Таким образом, нами получен весь необходимый аналитический аппарат для геометрического анализа и синтеза конструкций круглых канатов и прядей.

§ 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРЯДЕЙ И КАНАТОВ

Поперечное сечение пряди линейного касания так называемой свивки типа «Сил», показано на рис. 7. Прово-

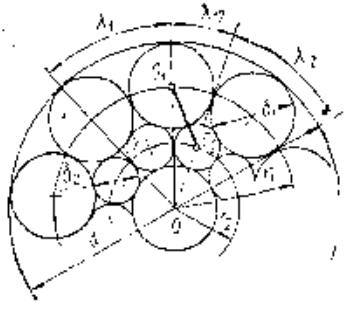


Рис. 7. Линейный контакт типа «Сил».

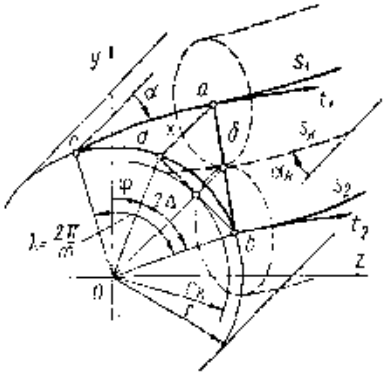


Рис. 8. Собственный тангенциальный контакт слоя проволок.

локи *1* наружного слоя, контактируя между собой, укладываются в углубления, образованные проволоками *2* внутреннего слоя. Контакт одного слоя проволок между собой будем называть собственным тангенциальным контактом. Контакт проволок внутреннего слоя с центральной проволокой называется нормальным контактом, так как точка контакта в данном случае расположена на главной нормали *n* к оси проволоки (см. рис. 5). Линейный контакт между слоями проволок называется смежным линейным контактом. В отдельных частных случаях смежный контакт может быть нормальным.

Рассмотрим собственный тангенциальный контакт произвольного слоя из *m* одинаковых проволок (рис. 8). Так как параметры свивки проволок одинаковы, то, отбросив

в формулах (I.16), (I.17), (I.18), (I.19), (I.20) индексы i и k, запишем синтезирующее уравнение

$$\delta = 2r\xi, \tag{I.24}$$

где

$$\xi = \sin\Delta \sqrt{1 + \cos^2\Delta \operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{I.25}$$

$$\operatorname{ctg} 2\Delta = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos\lambda}{\sin\lambda}. \tag{I.26}$$

Оси проволок делят окружность в поперечном сечении каната на m равных частей, поэтому

$$\lambda = \frac{2\pi}{m}. \tag{I.27}$$

Внешний $d_н$ и внутренний $d_в$ диаметры слоя проволок

$$d_н = 2r + \delta; \quad d_в = 2r - \delta. \tag{I.28}$$

Тогда в соответствии с формулой (I.24) можно записать:

$$r = \frac{d_н}{2(1+\xi)} = \frac{d_в}{2(1-\xi)}; \tag{I.29}$$

$$\delta = \frac{\xi d_н}{1+\xi} = \frac{\xi d_в}{1-\xi}. \tag{I.30}$$

При заданных значениях m, α и d задача сводится к определению r и δ, которые находятся по формулам (I.29), (I.30) посредством (I.25), (I.26).

Если вместо угла α задан шаг свивки h, то при помощи уравнения (I.3) задача сводится к неразрешимому алгебраическому уравнению относительно r очень высокой степени. Поэтому решение лучше искать путем последовательных приближений, беря в качестве нулевого приближения $\alpha = 0$. При этом в нулевом приближении

$$\Delta = \frac{\pi}{m}; \quad \xi = \sin\frac{\pi}{m}.$$

Вычислив по этим данным первое приближение для r (I.29), по формуле (I.3) находим первое приближение для α и т. д. до любой степени точности.

Радиус линии контакта s_k определяется из (I.21) сравнением индексов:

$$r_k = r\cos\Delta. \tag{I.31}$$

Угол наклона линии контакта определяем согласно (1.3) из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha_{\varphi} = \frac{2\pi r_{\varphi}}{h} = \operatorname{tg} \alpha \cos \Delta. \qquad (1.32)$$

Находим направляющие косинусы линии действия контактной силы (рис. 9) в соответствии с (1.22):

$$\left.\begin{aligned} k_p &= -\frac{r}{b} \operatorname{tg} \alpha \sin 2\Delta; \quad l_p = 2\frac{r}{b} \sin \Delta \sin(\varphi + \Delta); \\ m_p &= -2\frac{r}{b} \sin \Delta \cos(\varphi + \Delta). \end{aligned}\right\} \qquad (1.33)$$

Угол, образованный линией действия контактной силы с осью b, находим из уравнения

$$\cos \theta = \frac{r}{b} \cdot \frac{\sin 2\Delta}{\cos \alpha}. \qquad (1.34)$$

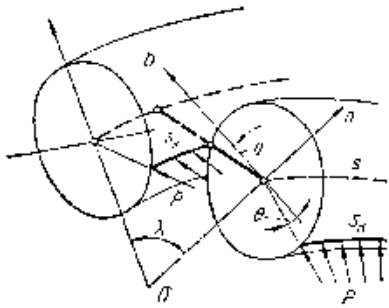


Рис. 9. Ориентация тангенциальных контактных сил.

Рассмотрим теперь в комплексе прядь типа «Сил» (см. рис. 7). Условия совместного линейного контакта двух слоев проволок представляются в виде следующей системы трех синтезирующих уравнений:

1. Уравнение собственного тангенциального контакта наружного слоя проволок

$$\delta_1 = 2r_1\xi_1.$$

2. Уравнение собственного тангенциального контакта внутреннего слоя проволок

$$\delta_2 = 2r_2\xi_2.$$

3. Уравнение смежного тангенциального контакта

$$\delta_{12}^2 = \left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right)^2 = \Phi_{12}.$$

При заданном внешнем диаметре пряди, числе проволок по слоям и шагу свивки требуется найти диаметры проволок, их радиусы и углы свивки. Геометрия наружного слоя проволок решается самостоятельно из условий

их собственного тангенциального контакта. Таким образом, наружный слой проволок можно считать найденным и определять геометрию внутреннего слоя.

При заданных r_1 и δ_1 вторые два уравнения могут быть сведены к квадратному уравнению относительно r_2:

$$r_2^2 - 2qr_2 + p = 0,$$

где

$$q = \frac{\delta_1\xi_2 + 2r_1\cos\varepsilon_{12}}{2(1-\xi_2^2)};$$

$$p = \frac{4r_1^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha_2\sin^2\varepsilon_{12}) - \delta_1^2}{4(1-\xi_2^2)}.$$

Корни этого уравнения

$$r_2 = q \pm \sqrt{q^2 - p}, \qquad (1.35)$$

где следует брать знак плюс, если радиус r_2 является внешним, и наоборот.

Так как числа проволок по слоям одинаковы, то

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2\pi}{m};\ \lambda_{12} = \frac{\pi}{m}.$$

Это уравнение содержит два неизвестных: r_2 и α_2 (посредством ξ_2, ε_2 и ε_{12}).

Задача решается методом последовательных приближений следующим образом. Берем в качестве нулевого приближения $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. При этом

$$\xi_1 = \xi_2 = \sin\frac{\pi}{m};\ \varepsilon_{12} = \lambda_{12} = \frac{\pi}{m},$$

и уравнение решается следующим образом:

$$r_2 = r_1\frac{\sin^2\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{m} \pm \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{1 + 2\cos\frac{\pi}{m}}}{\cos^2\frac{\pi}{m}}. \qquad (1.36)$$

Найдя отсюда при заданном r_1 значение r_2 в нулевом приближении, по формуле (1.3) определяем первое приближение для α_2, а по нему — значения ξ_2 и ε_{12}. После этого ищем первое приближение для r_2 по предыдущему уравнению и далее — вторые приближения для α_2 и остальных величин и т. д. до любой степени точности.

В качестве примера рассмотрим прядь типа $1 + 9 + 9$ при $h = 8d$. В силу геометрического подобия принимаем $d = 1$. В нулевом приближении

$$\xi_1 = \xi_2 = \sin\frac{\pi}{m};$$

$$r_1 = 0{,}3726;\ \delta_1 = 0.2549;\ r_2 = 0{,}2014;\ \delta_2 = 0{,}1375.$$

По условиям собственного тангенциального контакта для наружного слоя при $d_m = 1$ во втором приближении находим:

$$\varepsilon_1 = 36°59'16'';\ \alpha_1 = 16°27'24'';$$
$$\xi_1 = 0{,}32945;\ r_1 = 0{,}3761;$$
$$\delta_1 = 0{,}2478.$$

Далее по формуле (1.3) находим первое приближение для угла свивки внутреннего слоя проволоки $\alpha_2 = 9°3'22''$ и соответственно $\varepsilon_2 = 39°5'$; $\xi_2 = 0{,}3216$; $\varepsilon_{12} = 19°7'$.

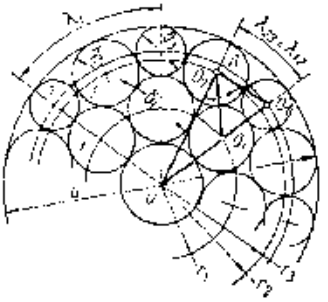


Рис. 10. Линейный контакт типа «Варрингтон».

По этим данным согласно (1.35) определяем первое приближение для радиуса $r_2 = 0{,}2055$, а по формуле (1.3) — второе приближение для угла свивки $\alpha_2 = 9°10'6''$ и т. д.

Несколько большую сложность представляет геометрический расчет прядей типа «Варрингтон» (рис. 10). Условие соприкосновения проволок наружного слоя с внешним круговым контуром каната приводит к следующим элементарным соотношениям:

$$2r_2 + \delta_2 = d;\ 2r_3 + \delta_2 = d.$$

Уравнение нормального контакта проволок *1—3*

$$2r_1 + \delta_1 + 2\delta_3 = d.$$

Уравнение собственного тангенциального контакта проволок внутреннего слоя

$$\delta_1 = 2r_1\xi_1.$$

Уравнение смежного контакта проволок *1—2*

$$\delta_{12}^2 = \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2}\right)^2 = \Phi_{12}.$$

Уравнение контакта проволок 2—3

$$\delta_{23}^2 = \left(\frac{\delta_2 + \delta_3}{2}\right)^2 = \Phi_{23}.$$

Из рис. 10 следует

$$m_1 = m;\ m_2 = 2m;\ \lambda_1 = \frac{2\pi}{m};\ \lambda_{12} = \lambda_{23} = \frac{\pi}{m}.$$

Таким образом, имеем шесть уравнений для определения шести неизвестных: трех диаметров проволок и трех радиусов слоев.

Углы свивки выражаются через радиусы слоев посредством уравнения (I.3).

Приведем систему уравнений к виду, удобному для последовательных приближений. Посредством этих уравнений и других вспомогательных соотношений выразим радиусы слоев проволок следующим образом:

$$r_3 = \frac{1}{4}[d + 2r_1(1 + \xi_1)]; \tag{I.37}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{b^2 + ac} - b}{a}, \tag{I.38}$$

где

$$a = \operatorname{tg}^2 \alpha_3 \sin^2 \varepsilon_{23};$$
$$b = d - r_3(1 - \cos \varepsilon_{23});$$
$$c = (d - 2r_3)\, d;$$

$$r_1 = \frac{a_1 - \sqrt{b_1}}{2(a_1^2 - b_1)}\, d. \tag{I.39}$$

В формуле (I.39)

$$a_1 = (\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 - \xi_1);$$

$$b_1 = 1 + (\sin^2 \varepsilon_{12} + \operatorname{ctg}^2 \alpha_1) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 \cos \varepsilon_{12}.$$

Для нулевого приближения при $d = 1$, полагая углы свивки равными нулю, находим:

$$r_3 = \frac{1 + 2r_1\left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)}{4}; \tag{I.40}$$

$$r_2 = \frac{1 + 2r_1\left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)}{\left(3 - \cos\frac{\pi}{m}\right) - 2r_1\left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{m}\right)}. \tag{I.41}$$

Определение радиуса внутреннего слоя сводится к решению кубического уравнения

$$8a_1r_1^3 - 4a_2r_1^2 + 2a_3r_1 - a_4 = 0, \qquad (1.42)$$

где

$$a_1 = \left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{m}\right)\cos\frac{\pi}{m};$$

$$a_2 = 3\left(1 + \cos\frac{\pi}{m}\right) + 2\left(3\cos\frac{\pi}{m} - 1\right)\sin\frac{\pi}{m} -$$

$$- \left(5 - 3\cos\frac{\pi}{m}\right)\sin^2\frac{\pi}{m};$$

$$a_3 = \left(3\cos\frac{\pi}{m} - 1\right)\left(1 - \sin\frac{\pi}{m}\right) - 4\left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right);$$

$$a_4 = 1 - \cos\frac{\pi}{m}.$$

Таблица 2

К определению радиуса внутреннего слоя

№ по пор.	Тип контакта	m	$\frac{\pi}{m}$	$2r_1$	$2r_2$	$2r_3$
1	5+5/5	5	36°	0,3698	0,7340	0,7935
2	6+6/6	6	30°	0,4288	0,7655	0,8214
3	7+7/7	7	25°43′	0,4784	0,7920	0,8422
4	8+8/8	8	22°30′	0,5190	0,8116	0,8585
5	9+9/9	9	20°	0,5570	0,8297	0,8738
6	10+10/10	10	18°	0,5870	0,8470	0,885

В табл. 2 даны численные решения этого уравнения для различных m и найденные значения остальных радиусов.

При больших значениях m можно избежать решения кубического уравнения, сделав дополнительные упрощения. Так как $\delta_3 < \delta_2$, то треугольник OO_1O_3 приближается к прямоугольному треугольнику с прямым углом β. Так, например, при $\frac{\pi}{m} = 20°$ этот угол будет $\beta = 88°$. Поэтому, рассматривая в нулевом приближении угол $\beta = 90°$, из решения этого треугольника при $d = 1$ находим

$$r_1 = \frac{3 - \cos\frac{\pi}{m} - \sin\frac{\pi}{m}}{2\left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{m} + \sin\frac{\pi}{m}\right)}. \qquad (1.43)$$

Так, например, для случая 5 из табл. 2 по этой формуле $2r_1=0,560$, что очень близко к более точному решению.

По нулевым приближениям для радиусов слоев в соответствии с (1.3) находим углы свивки и другие зависящие от них функции. Затем по формулам (1.37), (1.38), (1.39) находим первые приближения для радиусов, а по ним — вторые приближения для углов свивки и т. д. Расчет таким образом может быть выполнен с любой степенью точности.

Кроме описанных выше основных типов свивки, возможны другие геометрические формы построения линейного контакта проволок в прядях. Так как задача аналитического построения их геометрий сводится к сложным, трудно разрешимым обычными способами системам уравнений, то на них мы остановимся лишь в общих чертах.

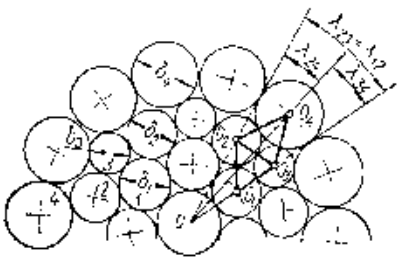


Рис. 11. Линейный контакт типа «Сил-Варрингтон».

В варианте сложной свивки типа «Сил-Варрингтон» (рис. 11) внутренние два слоя имеют контакт типа «Варрингтон», а покрывающий их наружный слой проволок контактирует по типу свивки «Сил». При этом наружные слои имеют в два раза большее число проволок по отношению к первому, внутреннему слою, т. е.

$$m_1 = m;\ m_2 = 2m;\ m_3 = 2m.$$

Поэтому полярные углы контакта

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{m};\ \lambda_{12} = \lambda_{23} = \frac{\pi}{m};\ \lambda_{24} = \lambda_{34} = \frac{\pi}{5m}.$$

Синтезирующие уравнения для построения геометрии контакта представляются в виде такой системы. Для первого внутреннего и внешнего слоя проволок необходимо записать уравнения собственного тангенциального контакта в форме

$$\delta_1 = 2r_1\xi_1;\ \delta_2 = 2r_2\xi_2.$$

Остальные условия контакта в соответствии с формулой (1.16) символически записываются так:

Контакт проволок	Уравнение
1—2	$\delta_{12}^2 = \Phi_{12}$
2—3	$\delta_{23}^2 = \Phi_{23}$
2—4	$\delta_{24}^2 = \Phi_{24}$
3—4	$\delta_{34}^2 = \Phi_{34}$

Контакт проволок *1—3* — нормальный и находится элементарно также из уравнения (I.16) при $\varepsilon_{13} = 0$:

$$\delta_{13} = r_3 - r_1.$$

Следует учесть соотношения (I.29) или (I.30), связывающие параметры наружного слоя проволок с внешним диаметром пряди. В результате получаем восемь уравнений и столько же неизвестных: четыре диаметра проволок и четыре радиуса свивки.

Таким образом, последовательным применением уравнения (I.16) к каждой паре контактирующих проволок всегда можно составить необходимое число уравнений для решения задачи геометрического построения прядей линейного контакта. На современном этапе развития техники задача решения систем уравнений этого типа может быть возложена на электронные вычислительные машины.

§ 5

ОСНОВНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ПОСТРОЕНИЮ ФАСОННЫХ ПРОФИЛЕЙ ПРОВОЛОК В ЗАКРЫТЫХ КАНАТАХ

Поверхность фасонной проволоки можно рассматривать как образуемую движением винтовых линий $s(r)$ одинакового шага вдоль контура C' наклонного сечения фасонной проволоки, совпадающего с поперечным сечением каната (рис. 12). При этом исходный контур C' задается таким образом, чтобы все проволоки касались друг друга по поверхностям.

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы по заданному исходному контуру C' найти фасонный контур C поперечного сечения проволоки для ее изготовления. Этот контур может быть найден на основании того, что кратчайшее расстояние между двумя винтовыми линиями $s(r)$,

образующими фасонный профиль, будет только в поперечном сечении проволоки. Формула (1.16) позволяет найти расстояние между любыми точками i и k на контуре фасонного поперечного сечения проволоки, соответствующее точкам i' и k' на исходном контуре C'. Следовательно, выбрав начало отсчета, можно построить контур C поперечного сечения проволоки. При этом точки исходного контура C', расположенные на дуге одного радиуса r, сдвинуты в поперечном сечении каната на полярный угол

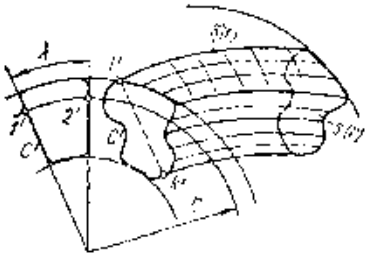


Рис. 12. Образование поверхности фасонной проволоки в закрытом канате.

$$\lambda = \frac{2\pi}{m},$$

где m — число проволок в данном слое.

Кроме того, расстояние между точками по высоте профиля, т. е. по длине радиуса r, равно фактическому их расстоянию в поперечном сечении проволоки. Это вытекает из того, что угол сдвига λ для этих точек равен нулю.

Начнем рассмотрение с наиболее простого клинового профиля (рис. 12 и 13). За начало отсчета выбираем ось r, проходящую через середину контура C', которая пройдет также и через середину искомого контура C. После этого ищем ширину профиля как функцию $\delta(r)$ посредством уравнения (1.16). Так как точки *1* и *2*, определяющие переменную ширину профиля, расположены на одном и том же радиусе r и сдвинуты по φ на угол λ, то это приводит к формуле

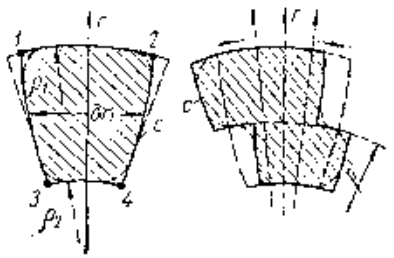


Рис. 13. Построение клиновидного и Z-образного профилей.

$$\delta(r) = 2r \sin \Delta \sqrt{1 + \cos^2 \Delta \, (g^2 \alpha}, \qquad (1.44)$$

где

$$\operatorname{ctg} 2\Delta = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos \lambda}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi r}{h}. \tag{I.45}$$

Для исходного клинового профиля C' его ширина в данной системе координат есть линейная функция от r, т. е.

$$\delta'(r) = 2r \sin \frac{\pi}{m}. \tag{I.46}$$

Искомый контур C в поперечном сечении проволоки, определяемый уравнением (I.44), не будет клиновым, так как его ширина δ есть нелинейная функция от r. Все стороны такого контура будут кривыми линиями.

Найдя по этому уравнению переменную ширину профиля, крайние точки профиля *1—2* и *3—4* соединим дугами с радиусами ρ_1 и ρ_2. Эти радиусы находим следующим образом. Кривизна винтовой линии s в выражении через угол свивки α, как известно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2 \alpha}{r}.$$

Ортогональная к s (см. рис. 12) винтовая линия s' имеет дополнительный к α угол свивки $\alpha' = 90^\circ - \alpha$.

Так как верхнее ξ и нижнее основания клинового профиля проволоки принимают форму винтовых линий, ортогональных к винтовым линиям свивки s, то радиусы кривизны этих оснований и будут соответственно

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\cos^2 \alpha_1}; \quad \rho_2 = \frac{r_2}{\cos^2 \alpha_2}. \tag{I.47}$$

Углы свивки α_1 и α_2 определяются по уравнению (I.3) при соответствующих значениях r.

Принимая во внимание малость углов $\frac{\pi}{m}$ при большом числе проволок, при некоторых упрощениях формулу (I.44) можно преобразовать к такому виду:

$$\delta(r) = 2r(1 - kr^2) \sin \frac{\pi}{m}, \tag{I.48}$$

где

$$k = \frac{2\pi^2}{h^2} \cos^2 \frac{\pi}{m}.$$

Отсюда видно, что с увеличением радиуса ширина профиля отклонится от прямого клина (I.46) в сторону се

уменьшения (см. рис. 13). Однако искривление сторон профиля получается незначительным, и технологически точки *1,3* и *2,4* можно соединить прямыми линиями. Задача, таким образом, сводится к определению только двух крайних размеров.

Профиль Z-образной формы, как это ясно из рис. 13, может быть получен из клинового путем относительного сдвига его частей, причем сдвиг частей клинового профиля происходит вдоль окружности радиуса

$$\rho' = \frac{r'}{\cos^2 \alpha'}. \qquad (I.49)$$

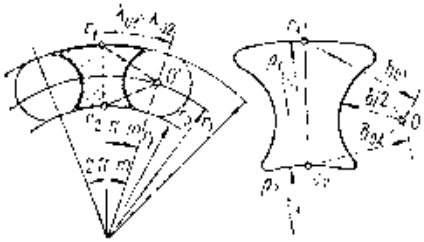


Рис. 14. Построение Х-образного профиля.

Погрешности такого построения имеют тот же порядок, что и при применении формул (I.47). Поэтому для меньшей погрешности обе половины исходного клинового профиля следует сдвигать относительно начальной срединной линии в обе стороны на одинаковый угол. Построенным таким образом теоретическим контурам профилей придаются необходимые технологические закругления, но так, чтобы ширина профиля не выходила за пределы расчетной.

Построение Х-образного профиля (рис. 14) получается наиболее простым и может быть выполнено с любой степенью точности. Этот профиль сочетается с круглыми проволоками, поэтому боковые контуры профиля представляют собой окружности. Верхнее и нижнее основания Х-образного профиля определяются так же, как и для клинового профиля. Остается в поперечном сечении проволоки найти положение центров боковых окружностей. Ввиду осевой симметрии профиля достаточно найти положение только одного центра кривизны *0*. Для этого на срединной линии профиля отметим крайние точки c_1 и c_2, которые расположены на продолжении одного радиуса, и поэтому расстояние между ними не изменяется. Центры круглых проволок пусть будут расположены на заданном

в поперечном сечении каната радиусе r_0 и сдвинуты друг относительно друга на угол

$$\lambda = \frac{2\pi}{m},$$

где m — число круглых, равное числу Х-образных проволок.

Точки c_1 и c_2 расположены на биссектрисе данного угла и поэтому

$$\lambda_{01} = \lambda_{02} = \frac{\pi}{m}.$$

Если найти расстояния δ_{01} и δ_{02} от точек c_1 и c_2 до винтовой линии, проходящей через точку O', то этим самым будет определено положение центра кривизны O в поперечном сечении профиля (рис. 14). При известных радиусах r_1, r_2 и r_0 эти расстояния определяются по формуле (1.16).

Найдя таким образом эти расстояния, засечками радиусов δ_{01} и δ_{02} на чертеже легко находим положение центра O кривизны профиля в поперечном сечении проволоки (рис. 14), из которого проводим контур окружности радиусом $\delta/2$, где δ — диаметр круглой проволоки.

§ 6

НОРМАЛЬНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ КОНТАКТ КРУГЛЫХ ПРОВОЛОК

В прядях с точечным контактом существенное значение имеет распределение точек контакта по длине проволоки. От этого во многом зависит жесткость и работоспособность прядей и канатов. Ниже приводится анализ распределения точек контакта в прядях различных конструкций. На рис. 15 показано положение одной проволоки верхнего слоя, имеющего точечный контакт с внутренним слоем.

Верхняя проволока в поперечном сечении e_1 соприкасается в точке P_1 с проволокой *1* внутреннего слоя. Дальше верхняя проволока идет свободно до ее поперечного сечения e_2, в котором она в точке P_2 имеет соприкосновение с проволокой *2* внутреннего слоя, соседней с проволокой *1*. Длину s_v верхней проволоки от поперечного сечения e_1 до e_2 будем называть пролетом.

Точка контакта P_2 проектируется на поперечное сечение каната, совпадающее с точкой контакта P_1, в точку P_2, смещенную относительно точки P_1 на угол ν, который будем называть углом пролета. В точках контакта проволоки имеют общую нормаль on к их осям и к оси пряди x, а следовательно, будут иметь также общую координату x_ν.

Пусть параметры свивки наружного слоя будут m_2, α_2, r_2; соответственно для внутреннего слоя — m_1, α_1, r_1.

Согласно известным соотношениям для винтовой линии (1.4), беря $\varphi = \nu$, можно записать

$$x_\nu = s_\nu \cos \alpha_2;$$

$$r_2 \nu = s_\nu \sin \alpha_2,$$

откуда следует

$$x_\nu = r_2 \nu \operatorname{ctg} \alpha_2. \quad (1.50)$$

Полярный угол, охватываемый на участке x_ν проволокой 2 из внутреннего слоя,

$$\varphi = \nu + \frac{2\pi}{m_1}.$$

Рис. 15. Нормальный точечный контакт слоев проволок.

Поэтому аналогично предыдущему получим

$$x_\nu = r_1 \left(\nu + \frac{2\pi}{m_1}\right) \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Сравнивая полученные выражения, находим величину угла пролета

$$\nu = \frac{2\pi}{m_1} \cdot \frac{r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1}{r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 - r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1}. \quad (1.51)$$

Принимая во внимание выражение (1.2) для шага свивки, умножая числитель и знаменатель этого выражения на 2π, можно также записать

$$\nu = \frac{2\pi}{m_1} \cdot \frac{h_1}{h_2 - h_1}. \quad (1.52)$$

Если слои проволок свиты в разные стороны, то один из углов свивки α_1 или α_2 следует принять отрицательным. При этом изменяет знак и угол ν, что означает просто изменение направления его отсчета. Поскольку нас инте-

ресует абсолютное значение угла пролета, то для контакта разно направленных слоев проволок получим

$$\nu = \frac{2\pi}{m_1} \cdot \frac{h_1}{h_2 + h_1}. \qquad (I.53)$$

Отсюда видно, что при контакте разно направленных слоев проволок угол пролета, а вместе с ним и длина пролета

$$s_\nu = \frac{r_2 \nu}{\sin \alpha_2} \qquad (I.54)$$

резко уменьшаются.

Важным относительным показателем является число $\varkappa$ точек контакта на шаге свивки проволоки, которое равно числу углов пролета. Так как шагу свивки соответствует полярный угол 2π, то

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\nu} = m_1 \frac{h_2 \pm h_1}{h_1}, \qquad (I.55)$$

где знак минус следует брать для одинаково направленных, а знак плюс — для разно направленных соприкасающихся слоев проволок.

Рассмотрим распределение точек контакта в нормальных прядях, в которых число проволок по слоям кратно шести и диаметры проволок одинаковы. Для упрощения полагаем углы свивки по слоям проволок также одинаковыми. Пусть i — номер слоя проволок, начиная от центра, и δ — их диаметр. Если прядь имеет конструкцию $1 + 6 + 12 + 18 + \cdots$, то для любого i-го слоя получим

$$m_i = 6i; \quad r_i = i\delta.$$

Тогда при равных углах свивки формула (I.53) перепишется так:

$$\nu_i = \frac{2\pi}{m_{i-1}} \cdot \frac{r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} = \frac{2\pi}{6}.$$

Следовательно, в такой конструкции пряди угол пролета для проволок всех слоев, независимо от их номера, одинаков и равен 60°.

При разно направленных слоях соответственно получим

$$\nu_i = \frac{2\pi}{6(2i-1)}.$$

Здесь картина контакта существенно изменяется по слоям проволок. Число точек контакта на шаге свивки в первом случае всегда равно шести, а во втором случае

$$\varkappa_i = \frac{2\pi}{\gamma_i} = 6\,(2i - 1).$$

Отсюда видно, что число точек контакта в этом случае растет с увеличением номера слоя.

В табл. 3 дана картина геометрии контакта по наружным проволокам для основных прядей рассматриваемого типа

Таблица 3

Геометрия контакта по наружным проволокам

Тип пряди	i	Число точек контакта при свивке слоев проволок	
		в одну сторону	в разные стороны
$1 + 6 + 12$	2	6	18
$1 + 6 + 12 + 18$	3	6	30
$1 + 6 + 12 + 18 + 24$	4	6	42

Таким образом, рассмотрев только геометрическую сторону построения прядей ТК, можно придти к выводам об определенных преимуществах прядей с переменным направлением свивки проволок. Если проволока находится во внутреннем слое, то пролеты контакта с разных сторон различны по длине. В общем случае длины пролетов с обеих сторон не только различны по величине, но и некратны друг другу, что в сумме создает на проволоку апериодическую нагрузку периодически сосредоточенными силами, направленными в противоположные стороны. Для наружной проволоки, испытывающей односторонний точечный контакт, распределение контактных сил периодическое.

§ 7

УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ

Геометрическое описание конструкций стальных канатов является лишь первым и необходимым этапом в построении их расчетной схемы. Для изучения силового взаимодействия элементов каната необходимо записать уравнения статики, которые представляются в виде двух

систем уравнений. Первая система уравнений должна отражать условия равновесия каждого отдельного элемента каната с учетом их взаимодействия. Это — так называемые внутренние уравнения статики. Вторая система уравнений, отвлекаясь от его сложной структуры, должна отражать уравнения статического равновесия каната в целом под действием внешней нагрузки. Это — так называемые внешние, или агрегатные, уравнения статики каната.

Каждый элемент каната представляет собой тонкий естественно изогнутый стержень, поперечные размеры которого пренебрежимо малы как по сравнению с его длиной, так и по сравнению с его радиусом естественной кривизны. Поэтому для описания деформаций элемента каната можно воспользоваться известными обобщенными уравнениями Кирхгофа для тонких стержней. Так как эти уравнения положены в основу всех дальнейших расчетов, то представляется целесообразным воспроизвести основные выкладки, связанные с их выводом.

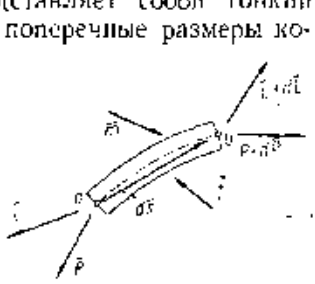


Рис. 16. К выводу уравнений статики тонкого стержня.

Внутренние силы в поперечном сечении стержня (не касаясь характера распределения напряжений) могут быть сведены к главному вектору $\vec{P}$ и главному моменту $\vec{L}$, действующими в центре тяжести сечения. Эти обобщенные силы можно рассматривать как приложенные к упругой линии стержня. Каждая отдельно взятая проволока или прядь в канате в силу их взаимодействия испытывает распределенную по ее длине нагрузку, которая может быть сведена к векторам интенсивности силовой $\vec{f}$ и моментной $\vec{m}$ нагрузок, отнесенных к упругой линии элемента каната (рис. 16).

Направленный элемент $d\vec{s}$ дуги упругой линии как вектор может быть представлен так:

$$d\vec{s} = ds\vec{t},$$

где ds — скалярная длина элемента;

$\vec{t}$ — единичный орт касательной к упругой линии.

Уравнения равновесия этого элемента в векторной форме

запишутся следующим образом:

$$\bar{P} + d\bar{P} - \bar{P} + \bar{f}ds = 0;$$

$$\bar{L} + d\bar{L} - \bar{L} + \bar{m}ds + [ds\,\bar{P}] = 0.$$

Принимая во внимание предыдущее выражение, после преобразований окончательно получим

$$\frac{d\bar{P}}{ds} = -\bar{f}; \quad \frac{d\bar{L}}{ds} = -[\bar{l}\bar{P}] - \bar{m}. \qquad (1.56)$$

В проекциях на оси неподвижной системы координат x, y, z эти уравнения дают шесть скалярных уравнений равновесия. Однако для выяснения характера деформаций стержня нас больше интересуют проекции сил и моментов в системе координат, связанной определенным образом с каждым его данным поперечным сечением, т. е. в подвижной системе координат.

В качестве подвижной системы координат, ориентированной в поперечном сечении элемента каната, удобно принять триэдр b, n, t, показанный на рис. 5. При перемещении вдоль упругой линии элемента каната этот триэдр вращается. Параллельный перенос осей координат не изменяет проекции векторов, поэтому в движении подвижного триэдра нас интересует только поворот его осей. Этот поворот можно охарактеризовать угловой скоростью $\bar{\omega}$ в том смысле, что она равна углу поворота триэдра при единичном поступательном перемещении его вершины вдоль упругой линии элемента каната. Тогда угол поворота подвижного триэдра при перемещении ds его вершин

$$d\bar{\varphi} = \omega ds.$$

Полное приращение вектора $\bar{P}$ в подвижной системе координат b, n, t в связи с этим имеет вид:

$$d\bar{P} = \tilde{d}\bar{P} + [d\bar{\varphi}\bar{P}] = \tilde{d}\bar{P} + [\bar{\omega}\bar{P}]\,ds,$$

где первый член отражает изменение модуля вектора, а второй — изменение его направления вследствие вращения подвижной системы координат.

Отсюда следует выражение полной производной d/ds от вектора через так называемую относительную (локальную) производную $\tilde{d}/ds$:

$$\frac{d\bar{P}}{ds} = \frac{\tilde{d}\bar{P}}{ds} + [\bar{\omega}\bar{P}].$$

Совершенно аналогично

$$\frac{d\bar{L}}{ds} = \frac{\bar{d}\bar{L}}{ds} + [\bar{\omega}\bar{L}].$$

Подставив в уравнения (1.56) эти значения производных от векторов, получим их выражения в подвижной системе координат в следующем виде:

$$\frac{\bar{d}\bar{P}}{ds} + [\bar{\omega}\bar{P}] = -\bar{f}; \quad \frac{\bar{d}\bar{L}}{ds} + [\bar{\omega}\bar{L}] = -[\bar{t}\bar{P}] - \bar{m}. \quad (1.57)$$

В проекциях на оси внутреннего триэдра, b, n, t эти уравнения дают по три скалярных уравнения статики. Проекции векторов обозначим теми же символами, снабдив их одноименными индексами с осями координат (рис. 17). При этом проекции принимают следующий смысл: P_t — осевое усилие; P_b и P_n — поперечные силы; L_t — крутящий и L_b, L_n — изгибающие моменты в элементе каната.

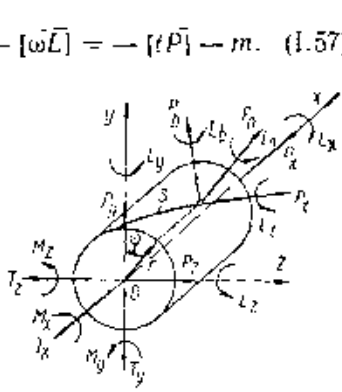


Рис. 17. Система векторов внутренних сил.

Проекции векторных произведений запишутся так:

$$[\bar{t}\bar{P}] = P_b\bar{n} - P_n\bar{b};$$

$$[\bar{\omega}\bar{P}] = (\omega_n P_t - \omega_t P_n)\,\bar{b} + (\omega_t P_b - \omega_b P_t)\,\bar{n} + (\omega_b P_n - \omega_n P_b)\,\bar{t}.$$

Векторное произведение $[\bar{\omega}\bar{L}]$ получается соответствующей заменой символов P и L.

После этого векторные уравнения (1.57) в проекциях на оси подвижного триэдра могут быть записаны в виде следующих двух систем скалярных уравнений:

проекции сил

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_b}{ds} + \omega_t P_n - \omega_n P_t &= -f_b; \\ \frac{dP_n}{ds} + \omega_b P_t - \omega_t P_b &= -f_n; \\ \frac{dP_t}{ds} + \omega_n P_b - \omega_b P_n &= -f_t; \end{aligned}\right\} \quad (1.58)$$

проекции моментов

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL_n}{ds} + \omega_t L_b - \omega_b L_t = -P_b - m_n;\\
&\frac{dL_b}{ds} + \omega_n L_t - \omega_t L_n = P_n - m_b;\\
&\frac{dL_t}{ds} + \omega_b L_n - \omega_n L_b = -m_t.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.59)$$

Это есть известные дифференциальные уравнения Кирхгофа [79] для тонкого стержня, записанные применительно к винтовому элементу каната. Уравнения описывают взаимодействие внутренних сил в канате. Чтобы установить их связь с внешними силами, приложенными к канату, необходимо перейти к системе координат x, y, z, связанных с его поперечным сечением. Для этого воспользуемся направляющими косинусами в табл. 1. Так, проектируя вектор $\overline{P}$ на осей b, n, t на оси x, y, z, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&P_x = P_b \sin\alpha + P_t \cos\alpha;\\
&P_y = P_b \cos\alpha \sin\varphi - P_n \cos\varphi - P_t \sin\alpha \sin\varphi;\\
&P_z = -P_b \cos\alpha \cos\varphi + P_n \sin\varphi + P_t \sin\alpha \cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.60)$$

Вектор момента внутренних сил относительно системы координат x, y, z будет $\overline{L} = [\overline{r}\,\overline{P}]$.

При этом векторное произведение

$$[\overline{r}\,\overline{P}] = (r_y P_z - r_z P_y)\,\overline{i} + r_x P_x \overline{j} - r_y P_x \overline{k},$$

где

$$r_y = r\cos\varphi;\ r_z = r\sin\varphi;\ r_x = 0.$$

Тогда, принимая во внимание выражения (1.60), проекции момента внутренних сил на оси координат x, y, z запишем так:

$$\left.\begin{aligned}
L_x &= L_b \sin\alpha + L_t \cos\alpha + (P_t \sin\alpha - P_b \cos\alpha)\, r;\\
L_y &= L_b \cos\alpha \sin\varphi - L_t \sin\alpha \sin\varphi + L_n \cos\varphi +\\
&\quad + (P_b \sin\alpha + P_t \cos\alpha)\, r \sin\varphi;\\
L_z &= -L_b \cos\alpha \cos\varphi + L_n \sin\varphi + L_t \sin\alpha \cos\varphi -\\
&\quad - (P_b \sin\alpha + P_t \cos\alpha)\, r \cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.61)$$

Суммируя все внутренние силы и моменты в поперечном сечении каната, можно найти проекции главного

вектора $\overline{T}$ и главного момента $\overline{M}$ в поперечном сечении каната в его агрегатном состоянии:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= \sum_i P_{xi};\ T_y = \sum_i P_{yi};\ T_z = \sum_i P_{zi}; \\ M_x &= \sum_i L_{xi};\ M_y = \sum_i L_{yi};\ M_z = \sum_i L_{zi}. \end{aligned}\right\} \quad (1.62)$$

В свою очередь, внутренние силы в поперечном сечении каната должны удовлетворять агрегатным уравнениям статики каната.

Отвлекаясь от внутренней структуры каната, будем рассматривать его также как некоторый тонкий стержень, испытывающий внешнюю нагрузку общего характера. Поэтому все внешние и внутренние силы, действующие на вырезанный элемент длины каната, также должны удовлетворять уравнениям статики типа (I. 58) и (I. 59). Рассмотрим общий случай, когда под действием внешней нагрузки ось каната принимает форму пространственной кривой. Тогда оси координат x, y, z, связанные с каждым данным поперечным сечением каната, при переходе от сечения к сечению будут изменять свою ориентацию в пространстве и в этом смысле будут подвижной системой координат. В связи с этим оси b, n, t будем называть внутренним подвижным триэдром, а оси x, y, z — внешним подвижным триэдром. Пусть вектор угловой скорости вращения системы координат x, y, z будет Ω. Через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ обозначим интенсивность внешней силовой и моментной нагрузок, действующих на канат и сведенных к его упругой линии.

Тогда, сопоставляя индексы t, n, b и x, y, z по аналогии с (I. 58) и (I. 59), можно записать следующие две системы агрегатных уравнений статики каната:

проекции сил

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT_y}{ds_0} + \Omega_x T_z - \Omega_z T_x &= -p_y; \\ \frac{dT_z}{ds_0} + \Omega_y T_x - \Omega_x T_y &= -p_z; \\ \frac{dT_x}{ds_0} + \Omega_z T_y - \Omega_y T_z &= -p_x; \end{aligned}\right\} \quad (1.63)$$

проекции моментов

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dM_x}{ds_0} + \Omega_y M_z - \Omega_z M_y = -T_x - q_y;\\
&\frac{dM_y}{ds_0} + \Omega_z M_x - \Omega_x M_z = T_y - q_x;\\
&\frac{dM_z}{ds_0} + \Omega_x M_y - \Omega_y M_x = -q_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (I.64)$$

Здесь через s_0 обозначена длина дуги упругой линии каната.

Таким образом, нами получены уравнения, которые дает статика. Уравнения (I. 58) и (I. 59) описывают взаимодействия внутренних сил в канате. Уравнения (I. 62) связывают внутренние силы в отдельных элементах каната с агрегатными силовыми факторами, действующими в его поперечном сечении. Уравнения (I.63) и (I.64) показывают связь агрегатных внутренних сил в канате с действующей на него внешней нагрузкой. Все эти системы уравнений должны решаться совместно.

Проекции сил $\bar{f}$ и момента $\bar{m}$, входящие во внутренние уравнения статики каната (I. 58) и (I. 59) как реактивные силы, остаются неопределенными из уравнений статики. Поэтому канат оказывается внутренне статически неопределимой системой. В некоторых задачах встречается внешняя статическая неопределимость относительно уравнений (I.63) и (I.64). Все это требует для решения задачи привлечения дополнительных уравнений, построенных на соображениях геометрического или энергетического характера.

§ 8

УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

При выводе уравнений статики (I. 58) и (I. 59) предполагалось, что вектор ω представляет собой полную угловую скорость внутреннего триэдра b, n, t в неподвижной системе координат x, y, z. Затем при выводе агрегатных уравнений статики (I. 63) и (I. 64) было показано, что вторая система координат в общем случае также может быть подвижной. При этом вектор $\bar{\omega}$ должен представлять полную угловую скорость внутреннего триэдра b,

n, t при его движении относительно внешнего триэдра x, y, z и в переносном движении вместе с ним. Пользуясь некоторыми положениями дифференциальной геометрии — так называемым принципом кинематической аналогии —, можно установить связь между компонентами угловых скоростей $\overline{\omega}$ и $\overline{\Omega}$ и определить таким образом коэффициенты исходных уравнений статики.

Из дифференциальной геометрии [94] известно, что кривизну и кручение кривой можно рассматривать как компоненты полной угловой скорости вращения естественного триэдра при поступательном движении его вершины вдоль кривой с постоянной (по модулю) скоростью, равной единице. В этом состоит кинематический смысл кривизны и кручения кривой, который положен в основу уравнений кинематической аналогии.

Выбранный нами внутренний триэдр b, n, t в общем случае не совпадает с естественным, и его оси b и n повернуты относительно естественных осей b_0 и n_0 на некоторый угол ψ.

Полная кривизна кривой $1/\rho$, как компонент вектора полной угловой скорости естественного триэдра, направлена по главной бинормали b_0. Так как оси b и n повернуты относительно естественного триэдра на угол ψ, то вектор полной кривизны кривой имеет проекции на оси b и n:

$$\omega_b = \frac{1}{\rho}\cos\psi, \quad \omega_n = \frac{1}{\rho}\sin\psi, \tag{I.65}$$

где ρ — радиус полной кривизны кривой.

Если угол ψ изменяется по длине кривой, то триэдр b, n, t не жестко связан с естественным и вращается относительно касательной, независимо от последнего. Поэтому кручение триэдра b, n, t, как компонент полной его угловой скорости по касательной к кривой, не равно кручению естественного триэдра. Таким образом, вводя произвольный триэдр, не связанный с естественным триэдром кривой, по проекциям угловой скорости его вращения на оси b и n мы можем найти только составляющие полной кривизны кривой; кручение кривой при этом остается неопределенным. Однако это не имеет принципиального значения для расчетов.

Выберем за положительное направление вектора угловой скорости в соответствии с принятой правой системой

координат вращение против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора. Рассмотрим вначале основной винтовой элемент в канате, ось s которого представляет собой обыкновенную винтовую линию на круговом цилиндре. Пусть вершина подвижного триэдра (рис. 18) движется вдоль s с единичной поступательной скоростью $v = 1$. Составляющая этой скорости вдоль образующей цилиндра $v_r = \cos\alpha$ не связана с вращением триэдра. Вторая составляющая $v_c = \sin\alpha$, направленная вдоль контура C основания цилиндра, есть линейная скорость вращательного движения триэдра относительно оси каната.

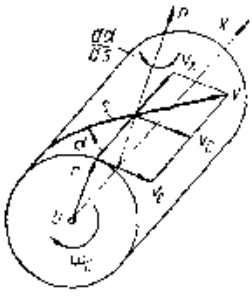


Рис. 18. Разложение поступательной скорости движения внутреннего триэдра.

Угловая скорость такого вращательного движения, очевидно, будет

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \bar{t};\ \omega_0 = \frac{v_c}{r} = \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{1.66}$$

что в проекциях по осям b, n, t запишется так:

$$\omega_b = \frac{\sin^2\alpha}{r};\ \omega_n = 0;\ \omega_t = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}. \tag{1.67}$$

Это есть известные из дифференциальной геометрии выражения для кривизны ω_b и кручения ω_t обыкновенной винтовой линии. Так как компонент угловой скорости по оси n равен нулю, то в прямом канате триэдр b, n, t совпадает с естественным.

Для обыкновенной винтовой линии угол $\alpha = \text{const}$. В общем случае в деформированном канате этот угол переменный. Вследствие изменения угла свивки триэдр b, n, t при движении вдоль кривой вращается относительно оси n при положительном $d\alpha'$ с отрицательной угловой скоростью

$$\omega_n' = -\frac{d\alpha'}{ds}. \tag{1.68}$$

Этот компонент равен кривизне развертки винтовой линии на плоскость $(x, r\varphi)$.

Тогда в общем случае вектор полной угловой скорости будет

$$\bar{\omega}_1 = \omega_0 \bar{t} - \frac{d\alpha'}{ds}\bar{n}. \tag{1.69}$$

Рассмотрим теперь канат, ось s_0 которого изогнута по некоторой пространственной кривой, обладающей кривизной $\bar{\chi}$ и кручением $\bar{\nu}$ (рис. 19). Пусть вектор кривизны $\bar{\chi}$, расположенный в плоскости поперечного сечения каната (y, z), образует с осью y угол ξ. Тогда его проекции на эти оси

$$\Omega_y = \chi \cos \xi; \quad \Omega_z = \chi \sin \xi \tag{1.70}$$

определяют две составляющие полной угловой скорости внешнего триэдра x, y, z, который, вообще говоря, также может не совпадать с естественным триэдром упругой линии каната.

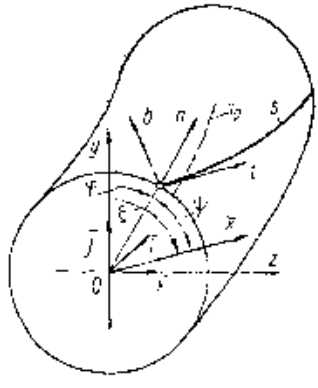


Рис. 19. К выводу уравнений кинематической аналогии для изогнутого каната.

Вектор кручения определяет угловую скорость вращения естественного триэдра оси каната относительно касательной.

Если угол ξ постоянный, то внешний триэдр x, y, z жестко связан с естественным и имеет ту же скорость вращения относительно касательной ν. В общем случае угол ξ может быть переменным по длине оси каната. Тогда внешний триэдр x, y, z будет вращаться относительно естественного с отрицательной скоростью $-d\xi/ds_0$. Полная угловая скорость внешнего триэдра относительно касательной

$$\Omega_x = \nu - \frac{d\xi}{ds_0}. \tag{1.71}$$

Таким образом определяются компоненты полной угловой скорости Ω вращения внешнего триэдра x, y, z через кривизну и кручение изогнутой оси каната.

Найдем теперь связь между угловой скоростью $\bar{\omega}$ вращения внутреннего триэдра b, n, t и угловой скоростью Ω внешнего триэдра. Каждая из этих угловых скоростей определена при единичной поступательной скорости вершины триэдра вдоль оси кривой. Если триэдр b, n, t

движется вдоль оси винтового элемента каната с единичной скоростью (см. рис. 18), то вдоль оси каната скорость поступательного движения его вершины равна $\cos\alpha'$. В то же время вершина триэдра x, y, z при определении $\bar{\Omega}$ рассматривается как движущаяся вдоль оси каната с единичной скоростью. Для согласования движения обоих триэдров необходимо рассматривать их как движущиеся так, что их вершины одновременно находятся в одном и том же поперечном сечении каната. Поскольку скорость триэдра b, n, t при определении ω является исходной, то скорость движения вершины внешнего триэдра x, y, z вместо единицы следует принять равной $\cos\alpha'$. Для этого величину угловой скорости Ω от единичного движения следует умножить на величину фактической скорости $\cos\alpha'$, приняв в расчет

$$\bar{\Omega}_{пер} = \bar{\Omega}\cos\alpha' = (\Omega_x\bar{i} + \Omega_y\bar{j} + \Omega_z\bar{k})\cos\alpha'. \qquad (1.72)$$

Это будет переносная угловая скорость вращения триэдра b, n, t при его совместном движении с триэдром x, y, z. Относительно касательной к оси каната оба триэдра вращаются с независимыми угловыми скоростями соответственно ω_0 (1.66) и

$$\Omega'_x = \Omega_x\cos\alpha'.$$

В соответствии с выбранным положительным направлением угловых скоростей, беря положительную разность этих компонентов и присоединяя к ним величину (1.68), получим значение угловой скорости вращения триэдра b, n, t относительно x, y z:

$$\bar{\omega}_{отн} = (\omega_0 - \Omega_x\cos\alpha')\bar{i} - \frac{d\alpha'}{ds}\bar{n}. \qquad (1.73)$$

В результате полная угловая скорость триэдра b, n, t

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega}_{пер} + \bar{\omega}_{отн} = (\Omega_y\bar{j} + \Omega_z\bar{k})\cos\alpha' + \omega_0\bar{i} - \frac{d\alpha'}{ds}\bar{n}. \qquad (1.74)$$

С помощью табл. 1 для направляющих косинусов в проекциях на оси b, n, t получим

$$\left.\begin{aligned}
\omega_b &= \omega_y\cos^2\alpha'\sin\varphi - \Omega_z\cos^2\alpha'\cos\varphi + \omega_0\sin\alpha';\\
\omega_n &= \Omega_y\cos^2\alpha'\cos\varphi + \Omega_z\cos\alpha'\sin\varphi - \frac{d\alpha'}{ds};\\
\omega_t &= -\Omega_y\cos\alpha'\sin\alpha'\sin\varphi + \Omega_z\cos\alpha'\sin\alpha'\cos\varphi +\\
&\qquad + \omega_0\cos\alpha'.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.75)$$

После подстановки выражений (I.66) и (I.70) получим

$$\left.\begin{aligned}
\omega_\xi &= -\frac{1}{\rho}\cos^2\alpha'\sin\psi + \frac{\sin^2\alpha'}{r};\\
\omega_n &= \frac{1}{\rho}\cos\alpha'\cos\psi - \frac{d\alpha'}{ds};\\
\omega_\zeta &= \frac{1}{\rho}\sin\alpha'\cos\alpha'\sin\psi + \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{r},
\end{aligned}\right\} \qquad (I.76)$$

где $\psi = \xi - \varphi$;

ρ — радиус полной кривизны оси каната.

Отсюда видно, что компоненты уравнений (I.76) инвариантны, т. е. независимы от выбора системы координат x, y, z; они определяются только кривизной упругой линии каната и внутренним углом ψ.

§ 9

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Уравнения кинематической аналогии определяют относительный поворот поперечных сечений винтового элемента каната в его некотором конечном положении, независимо от предшествовавших ему линейных смещений. Геометрические уравнения связывают деформации упругой линии основного элемента каната с его линейными и угловыми смещениями в канате. Эти смещения можно представить через продольное u и угловое v смещения относительно оси каната (рис. 20). Кроме того, можно также учесть радиальное смещение Δr.

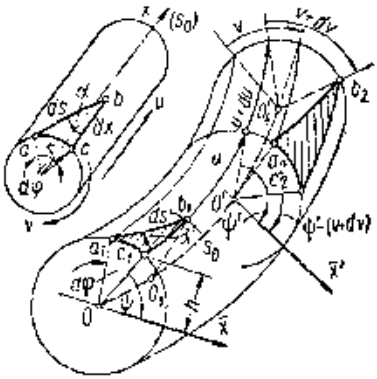


Рис. 20. Схема линейных смещений и деформации винтового элемента каната.

Из треугольника a, b, c на поверхности базисного цилиндра находим

$$ds\cos\alpha = bc = dx;\quad ds\sin\alpha = ac = rd\varphi; \qquad (I.77)$$

откуда следует

$$\frac{d}{ds} = \cos\alpha\,\frac{d}{dx} = \frac{\sin\alpha}{r}\cdot\frac{d}{d\varphi}. \qquad (I.78)$$

Указанные смещения деформируют треугольник так, что его сторона ab получает относительное удлинение

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta(ds)}{ds},$$

а угол свивки α получает некоторое конечное приращение

$$\delta\alpha = \eta.$$

Для определения этих деформаций дифференцируем выражение (1.77):

$$\left.\begin{aligned} &\delta(ds)\cos\alpha - ds\sin\alpha\,\delta\alpha = \delta(dx);\\ &\delta(ds)\sin\alpha + ds\cos\alpha\,\delta\alpha = r\delta\varphi + \varphi\delta r. \end{aligned}\right\} \qquad (1.79)$$

Здесь можно приравнять

$$\delta(dx) = du; \quad \delta\varphi = dv; \quad \delta r = \Delta r.$$

После этого, обозначая

$$\varepsilon = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{du}{dx}; \quad \vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dv}{dx}; \quad \varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} \qquad (1.80)$$

и принимая во внимание предыдущие выражения, из системы уравнений (1.79) находим

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \varepsilon\cos^2\alpha + r\vartheta\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon_r\sin^2\alpha;\\ &\eta = r\vartheta\cos^2\alpha - (\varepsilon - \varepsilon_r)\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1.81)$$

Эти уравнения относятся к прямолинейному канату. Рассматривая изгиб каната, будем считать вначале, что его деформации подчиняются гипотезе плоских сечений с нейтральной осью, проходящей через центр поперечного сечения каната, т. е. предполагается, что при изгибе длина осевой линии каната не изменяется. Тогда в соответствии с гипотезой плоских сечений удлинение образующих базисного цилиндра, которым принадлежит сторона bc при его изгибе, будет пропорционально их расстоянию

$$h = r\sin\psi$$

до линии вектора кривизны $\vec{\chi}$ (рис. 20) и обратно пропорционально радиусу кривизны оси каната

$$\varepsilon' = -\frac{h}{\rho} = -\frac{r}{\rho}\sin\psi = -\chi h. \qquad (1.82)$$

Это удлинение будет отрицательным, так как при положительной кривизне $\vec{\chi}$ рассматриваемые точки поверхности базисного цилиндра находятся со стороны его вогнутости,

Полученное удлинение относится к некоторому начальному положению треугольника $a_1b_1c_1$ в изгибаемом канате. Вследствие смещений u и v он займет некоторое новое положение в канате a_2, b_2, c_2, которому будут соответствовать новые значения кривизны χ' и угла ψ' (рис. 20). Положение точки c_2 относительно вектора кривизны в новом положении будет определяться углом

$$\psi'' = \psi' - (v + dv) \approx \psi' + v.$$

Следовательно, для нового положения

$$\varepsilon'' = -\chi' h = -\frac{r}{\rho'} \sin(\psi' - v). \qquad (1.83)$$

При этом с точностью до малых первого порядка можно записать:

$$\chi' = \chi + \frac{d\chi}{ds_0} \Delta s_0; \quad \psi' = \psi + \frac{d\psi}{ds_0} \Delta s_0.$$

Производная $d\psi/ds_0$ равна кручению ν естественного триэдра оси каната, а приращение ее дуги Δs_0 следует приравнять линейному смещению u. Тогда получим

$$\chi' = \chi + \frac{d\chi}{ds_0} u; \quad \psi' = \psi + \nu u.$$

После этого формула (1.83) запишется так:

$$\varepsilon'' = -r\left(\chi + \frac{d\chi}{ds_0} u\right) \sin(\psi + \nu u - v). \qquad (1.84)$$

Сторона ac рассматриваемого треугольника не деформируется при изгибе каната. Поэтому величину (1.84) можно рассматривать лишь как дополнительное значение к ε в формуле (1.81). Принимая это во внимание и полагая $ds_0 = dx$, формулы (1.81) для изгиба каната запишутся так:

$$\varepsilon_s = \frac{du}{dx} \cos^2\alpha + r\frac{dv}{dx} \sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon_r \sin^2\alpha -$$

$$- r\left(\chi + \frac{d\chi}{dx} u\right) \cos^2\alpha \sin(\psi + \nu u - v); \qquad (1.85)$$

$$\eta = r\frac{dv}{dx} \cos^2\alpha - \left(\frac{du}{dx} - \varepsilon_r\right) \sin\alpha\cos\alpha +$$

$$+ r\left(\chi + \frac{d\chi}{dx} u\right) \sin\alpha\cos\alpha \sin(\psi + \nu u - v). \qquad (1.86)$$

При выводе выражения (1.84) деформации каната условно были подчинены гипотезе плоских поперечных сечений. Конечные деформации (1.85), (1.86) не связаны с этой гипотезой, так как функции u и v могут быть произвольными.

Рассмотрим детально прямой канат и найдем изменения кривизны и кручения винтовой линии, вызванные этими деформациями. Под влиянием изменения угла и радиуса свивки параметры винтовой линии (1.67) получают такие приращения:

$$\bar{b} = \delta\omega_b = \frac{\partial\omega_b}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\omega_b}{\partial r}\delta r;$$

$$\tilde{t} = \delta\omega_t = \frac{\partial\omega_t}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\omega_t}{\partial r}\delta r.$$

Выполнив дифференцирование, после соответствующих подстановок и преобразований находим:

$$\left.\begin{aligned} \bar{b} &= (r\theta\cos^2\alpha - \varepsilon\sin\alpha\cos\alpha)\frac{\sin 2\alpha}{r} + \varepsilon_r\frac{\sin^2\alpha}{r}\cos 2\alpha; \\ \tilde{t} &= (r\theta\cos^2\alpha - \varepsilon\sin\alpha\cos\alpha)\frac{\cos 2\alpha}{r} - 2\varepsilon_r\frac{\sin^3\alpha}{r}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (1.87)$$

Далее вследствие удлинения начального единичного отрезка упругой линии винтового элемента его длина становится равной $1 + \varepsilon_s$, а повороты поперечных сечений увеличиваются до

$$\omega_b' = \omega_b(1 + \varepsilon_s); \quad \omega_t' = \omega_t(1 + \varepsilon_s).$$

Следовательно, дополнительными приращениями поворотов поперечных сечений будут $\omega_b\varepsilon_s$ и $\omega_t\varepsilon_s$. Прибавив эти компоненты к (1.87), полные повороты поперечных сечений винтового элемента, вызванные деформациями (1.85), (1.86) в прямом канате ($\chi = 0$), получим в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \bar{b} &= \theta(1 + \cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + (\varepsilon_r - \varepsilon)\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{r}; \\ \tilde{t} &= \theta\cos^4\alpha - (\varepsilon_r - \varepsilon)\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (1.88)$$

В ряде случаев внешним показателем деформации является изменение шага свивки

$$h = 2\pi r\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Дифференцируя это выражение по переменным r и α, находим

$$\delta h = 2\pi \operatorname{ctg} \alpha \delta r - \frac{2\pi r}{\sin^2 \alpha} \delta\alpha.$$

Подставляя значение $\delta\alpha$ из (I.81), получим

$$\delta h = h\varepsilon - \frac{h^2}{2\pi} \theta. \qquad (I.89)$$

Величина ε, при этом сокращается. Изменение шага свивки, таким образом, не зависит от изменения поперечных размеров каната.

Наряду с уравнениями статики и кинематической аналогии, полученные геометрические уравнения играют фундаментальную роль в теории деформаций стальных канатов.

§ 10

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Основными напряжениями в проволоках каната являются напряжения от осевого растяжения σ_p и нормальные напряжения от изгиба $\sigma_{из}$. Иногда приходится учитывать касательные напряжения кручения τ_t. Касательные напряжения в проволоках от поперечных сил P_y и P_z, как и в других стержневых системах, обычно получаются незначительными, и ими можно пренебречь. Поэтому здесь рассматриваются только первые три компоненты напряжений.

Нормальные напряжения в поперечном сечении проволоки от ее осевого растяжения выражаются через осевую силу P_t или относительное удлинение ε_s:

$$\sigma_p = \frac{P_t}{F} = E\varepsilon_s, \qquad (I.90)$$

где F — площадь поперечного сечения проволоки;

E — модуль нормальной упругости.

Наибольшие касательные напряжения кручения в круглой проволоке выражаются через крутящий момент L_t или деформацию кручения $\bar{t}$:

$$\tau_t = \frac{L_t}{W_p} = G\frac{\delta}{2}\bar{t}, \qquad (I.91)$$

где G — модуль сдвига;

δ — диаметр круглой проволоки;

$W_p = \frac{\pi\delta^3}{16}$ — полярный момент сопротивления.

Для некруглых профилей эти напряжения определяются общими методами теории упругости, которые здесь не рассматриваются.

Изгиб проволок в канате в общем случае происходит в двух плоскостях: относительно оси b и относительно оси n (рис. 21).

Приращениям кривизны упругой линии проволоки $\tilde{b}$ и $\tilde{n}$ по этим осям соответствуют радиусы кривизны:

$$\rho_b = \frac{1}{\tilde{b}}; \quad \rho_n = \frac{1}{\tilde{n}}. \qquad (1.92)$$

Рис. 21. Системы координат в поперечном сечении проволоки.

Изгибные деформации и напряжения на основании гипотезы плоских поперечных сечений могут быть вычислены для проволок произвольного профиля. Выбранным положительным направлениям кривизны соответствуют такие повороты поперечных сечений проволоки, при которых ось n направлена в сторону выпуклости относительно радиуса ρ_b, а ось b — в сторону вогнутости относительно радиуса ρ_n.

Поэтому относительное удлинение в некоторой точке c профиля с положительными координатами b и n будет

$$\varepsilon_{\text{изг}} = \frac{n}{\rho_b} - \frac{b}{\rho_n} = n\tilde{b} - b\tilde{n}. \qquad (1.93)$$

Введя полярные координаты (см. рис. 21)

$$b = \xi \cos\gamma; \quad n = \xi \sin\gamma,$$

можно также записать

$$\varepsilon_{\text{изг}} = \xi(\tilde{b}\sin\gamma - \tilde{n}\cos\gamma). \qquad (1.94)$$

Деформации изгиба упругой линии проволоки могут быть выражены через изгибающие моменты:

$$\tilde{b} = \frac{L_b}{EI_b}; \quad \tilde{n} = \frac{L_n}{EI_n}, \qquad (1.95)$$

где I_b и I_n — соответствующие осевые моменты инерции площади сечения проволоки.

Соответствующие нормальные напряжения изгиба будут

$$\sigma_{из} = E\varepsilon_{из}. \qquad (1.96)$$

Полные нормальные напряжения в данной точке

$$\sigma_z = \sigma_p + \sigma_{из}. \qquad (1.97)$$

Далее, пользуясь одной из теорий прочности, можно найти эквивалентные напряжения. По четвертой теории прочности получим

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}. \qquad (1.98)$$

Все эти выражения относятся к прямому стержню. Фактически проволока в канате представляет собой естественно изогнутый стержень, но эта кривизна получается обычно незначительной и ее учет не приводит к заметным уточнениям.

ГЛАВА 2

РАСТЯЖЕНИЕ И КРУЧЕНИЕ СТАЛЬНЫХ КАНАТОВ

§ 11

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

При растяжении и кручении канатов относительные смещения элементов получаются незначительными, а вместе с этим работа внутренних сил трения несравненно мала по отношению к работе упругих сил. Поэтому силами трения в данном расчете можно пренебречь. Второе существенное допущение заключается в том, что геометрически равноценные проволоки или пряди полагаются равноправными в каждом поперечном сечении каната и в силовом отношении.

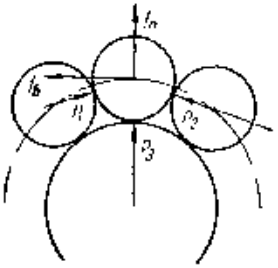


Рис. 22. Схема внутренних контактных сил, действующих на винтовой элемент в канате.

При отсутствии сил трения контактные силы направлены нормально к поверхности проволоки или пряди и не создают моментной и осевой силовой нагрузки. Следовательно, в уравнениях Кирхгофа (I.58) и (I.59) величины $\overline{m}$ и $\overline{f}_l$ можно принять равными нулю.

Контактная нагрузка на проволоку создается разностью нормальных давлений смежных слоев и тангенциальным давлением соседних проволок (рис. 22). Первая нагрузка сводится к некоторой нормальной силе P_3, а вторая — к тангенциальным силам P_1 и P_2. Так как проволоки в одном слое предполагаются равноправными в силовом отношении, то силы P_1 и P_2 одинаковы. Сила f_b, действующая на ось проволоки, вызванная разностью этих

давлений, поэтому равна нулю, и их равнодействующая, таким образом, также сводится к некоторой нормальной силе.

Это дает основание принять, что вся контактная нагрузка на основной элемент каната сводится к равнодействующей f_n, направленной вдоль главной нормали к его винтовой оси.

В результате уравнения Кирхгофа (I.58) и (I.59) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_a}{ds} + \omega_t P_b - \omega_b P_t = -f_n; \\ &\frac{dP_b}{ds} - \omega_t P_a = 0; \\ &\frac{dP_t}{ds} + \omega_b P_a = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (II.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL_a}{ds} + \omega_t L_b - \omega_b L_t = -P_b; \\ &\frac{dL_b}{ds} - \omega_t L_a = P_a; \\ &\frac{dL_t}{ds} + \omega_b L_a = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (II.2)$$

Найдем вначале решения этих уравнений для периодического одностороннего контакта (рис. 23). Это решение охватывает некоторые важнейшие конструкции прядей ТК и ТЛК и верно для наружного точечного контактирующего слоя проволок. Двухсторонний точечный контакт слоя проволок в общем случае создает непериодическую нагрузку на проволоку, и решения уравнений Кирхгофа значительно усложняются.

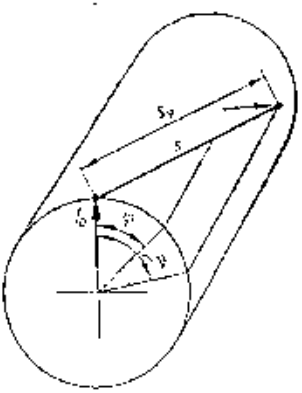


Рис. 23. Односторонний периодический точечный контакт проволок.

При одностороннем точечном контакте нормальная нагрузка f_n на проволоку сводится к периодически сосредоточенным контактным силам f_0, расстояние между которыми по оси проволоки равно длине пролета контакта s (см. § 6). Все пролеты можно считать равноценными как в геометрическом, так и в силовом отношении. Поэтому

все внутренние силы в проволоке являются периодическими функциями.

Определение периодических решений системы линейных дифференциальных уравнений (II.1) и (II.2) с постоянными коэффициентами (I.67)

$$\omega_k = \frac{\sin^2\alpha}{r}; \quad \omega_t = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}$$

не представляет принципиальных затруднений.

Периодичность решений фактически нарушается вблизи точек закрепления, так как последние могут совпадать с точками, расположенными внутри пролета. Однако, учитывая, что пролет составляет лишь некоторую часть шага свивки проволоки и ссылаясь на известный принцип Сен-Венана, мы упрощаем граничные условия, полагая периодичность решений всюду, включая и граничные пролеты. При этом можно положить, что граничные точки совпадают с точками контакта, и рассматривать каждую проволоку как состоящую из целого числа пролетов.

При решении системы уравнений (II.1) — (II.2) с периодической контактной силой f_n применим методы операционного исчисления [61], которые в данном случае являются более эффективными. Для этого воспользуемся односторонним преобразованием Лапласа в такой форме:

$$y(p) = p\int_0^\infty y(s)\,e^{-ps}ds,$$

где $y(s)$ — некоторая функция от s, называемая первообразной;

$y(p)$ — изображение функции $y(s)$;

p — комплексное число, удовлетворяющее определенным условиям.

Не касаясь принципиальной стороны вопроса, что можно найти в специальной литературе [61], представим необходимые преобразования с их формальной точки зрения.

Производная от функции $y'(s)$ изображается следующим образом:

$$\frac{dy}{ds} \doteq py(p) - pc,$$

где c — постоянная, равная значению функции $y(s)$ при $s = 0$, т. е. $c = y(0)$.

Приведем также изображение интеграла:

$$\int_0^s y(s)\,ds \doteqdot \frac{1}{p}\,y(p).$$

Изображение любой периодической функции $\Phi(s)$ с периодом, равным τ, представляется следующим образом:

$$\overline{\Phi}(p) = \frac{\overline{K}(p)}{1 - e^{-p\tau}}. \qquad (а)$$

Здесь $\overline{K}(p)$ — изображение функции, определенной в начале отсчета аргумента s только на длине периода τ и равной нулю за его пределами:

$$\overline{K}(p) \doteqdot \begin{cases} K(s) & \text{при } s < \tau; \\ 0 & \text{при } s > \tau. \end{cases}$$

Если f_0 есть сосредоточенная в начале координат сила, то ее изображение запишется так:

$$pf_0 \doteqdot \begin{cases} f_0 & \text{при } s = 0; \\ 0 & \text{при } s > 0. \end{cases}$$

В рассматриваемом нами случае нагрузка f_n представляется периодически сосредоточенными силами f_0 на концах пролета контакта, поэтому ее изображение может быть представлено следующим образом:

$$\overline{f}_n(p) = \frac{pf_0}{1 - e^{-p\tau}}, \qquad (б)$$

где τ следует положить равным длине пролета s (рис. 23).

Имея эти соотношения, необходимые для применения операционного исчисления, перейдем к изображающим уравнениям. Для этого умножаем уравнения (II.1), (II.2) на e^{-ps} и интегрируем их почленно от нуля до бесконечности. В результате, принимая во внимание общие выражения для изображения функции и ее производной, из (II.1) и (II.2) получаем две системы изображающих уравнений.

Уравнения сил:

$$\left.\begin{aligned} p\overline{P}_a(p) + \omega_t\overline{P}_b(p) - \omega_b\overline{P}_t(p) &= -\overline{f}_n(p) + pC_a; \\ p\overline{P}_b(p) - \omega_t\overline{P}_a(p) &= pC_b; \\ p\overline{P}_t(p) + \omega_b\overline{P}_a(p) &= pC_t. \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Уравнения моментов:

$$\left.\begin{aligned} p\bar{L}_n(p) + \omega_t\bar{L}_b(p) - \omega_b\bar{L}_t(p) &= -\bar{P}_n(p) + pD_n; \\ p\bar{L}_b(p) - \omega_t\bar{L}_n(p) &= \bar{P}_n(p) + pD_b; \\ p\bar{L}_t(p) + \omega_b\bar{L}_n(p) &= pD_t, \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

где C_b, C_n, C_t — произвольные постоянные по силам;
D_b, D_n, D_t — произвольные постоянные по соответствующим моментам.

Принимая во внимание изображение (а) и решая эту систему алгебраических уравнений, находим:

$$\bar{P}_t(p) = C_t - \omega_b\frac{\bar{\theta}(p)}{1-e^{-p\tau}}; \quad \bar{P}_b(p) = C_b + \omega_t\frac{\bar{\theta}(p)}{1-e^{-p\tau}};$$

$$\bar{P}_n(p) = -\frac{\bar{\psi}(p)}{1-e^{-p\tau}};$$

$$\bar{L}_b(p) = D_b + \frac{\bar{\theta}(p)}{1-e^{-p\tau}} - \omega_t\frac{\bar{\psi}(p)}{1-e^{-p\tau}};$$

$$\bar{L}_t(p) = D_t - \omega_b\frac{\bar{\psi}(p)}{1-e^{-p\tau}};$$

$$\bar{L}_n(p) = p\frac{\bar{\psi}(p)}{1-e^{-p\tau}}.$$

Здесь обозначено:

$$\bar{\theta}(p) = p\frac{f_0 - C_n(1-e^{-p\tau})}{p^2+\omega_0^2} -$$

$$-(\omega_b C_t - \omega_t C_b)\frac{1-e^{-p\tau}}{p^2+\omega_0^2};$$

$$\bar{\psi}(p) = (C_b + \omega_t D_b - \omega_b D_t - pD_n)\frac{1-e^{-p\tau}}{p^2+\omega_0^2} -$$

$$-2\omega_t\frac{\bar{\theta}(p)}{p(p^2+\omega_0^2)},$$

где

$$\omega_0 = \frac{\sin\alpha}{r}.$$

В соответствии с (а) для получения периодических решений произвольные постоянные необходимо выбрать так, чтобы функции $\bar{\theta}(p) \div \theta(s)$, $\bar{\psi}(p) \div \psi(s)$ и их произ-

водные обращались в нуль за пределами длины пролета контакта, т. е.

$$\theta(s)|_{s>s_\nu}=0; \quad \psi(s)|_{s>s_\nu}=0.$$

В дальнейшем от дуги s удобнее перейти к полярному углу φ по формуле (1.4) следующим образом:

$$s=\frac{r\varphi}{\sin\alpha}=\frac{\varphi}{\omega_0}.$$

При этом в соответствии с принятыми обозначениями (рис. 23) получим

$$\omega_0 s_\nu=\nu; \quad s_\nu=\tau=\frac{r\nu}{\sin\alpha}.$$

Входящие в полученные решения изображения относится к числу табличных и в выражении через аргумент φ запишутся так:

$$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}\div\frac{\sin\varphi}{\omega_0}\div\frac{p^2}{p^2+\omega_0^2}\div\cos\varphi;$$

$$\frac{p}{(p^2+\omega_0^2)^2}\div\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2\omega_0^2}; \quad \frac{p^2}{(p^2+\omega_0^2)^2}\div\frac{\varphi\sin\varphi}{2\omega_0^2}.$$

Следует также принять во внимание известное разложение в степенный ряд

$$\frac{1}{1-e^{-p\tau}}=1+e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau}+\ldots$$

и к нему теорему запаздывания, в соответствии с которой

$$y(p)e^{-pn\tau}\div\begin{cases}0; \text{ при } s<n\tau;\\ y(s-n\tau); \text{ при } s>n\tau,\end{cases}$$

где $n=0, 1, 2, 3\ldots$

Применение теоремы запаздывания позволяет найти первообразные функции $\theta(\varphi)$ и $\psi(\varphi)$ по их изображениям как при $s>s_\nu$ $(\varphi>\nu)$, так и при $s<s_\nu$ $(\varphi<\nu)$. Каждая из этих функций линейно зависит от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Поскольку при $\varphi>\nu$ обе они должны быть равны нулю, то для выполнения этих условий необходимо приравнять в них нулю коэффициенты при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Это приводит к четырем алгебраическим уравнениям для определения произвольных постоянных. Поскольку произвольных постоянных всего шесть, то для их определения следует воспользоваться дополнительными условиями.

В качестве дополнительных уравнений следует взять первые уравнения статики (I.60), (I.61), которые запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_b \sin\alpha + P_t \cos\alpha; \\ L_x &= L_b \sin\alpha + L_t \cos\alpha + \\ &+ r(P_t \sin\alpha - P_b \cos\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (II.3)$$

Если в этих уравнениях перейти к изображениям, применив преобразование Лапласа, то после подстановки в них найденных изображений все выражения, зависящие от p (или в первообразных — от s), взаимно сокращаются и остаются только произвольные постоянные. Это подтверждает принятое ранее предположение о том, что равноправие пролетов контакта предопределяет постоянство осевых сил P_x и моментов L_x в канате. Поэтому уравнения (II.3) в изображениях запишутся так:

$$P_x = C_b \sin\alpha\, C_t \cos\alpha;$$

$$L_x = D_b \sin\alpha + D_t \cos\alpha + r(C_t \sin\alpha - C_b \cos\alpha).$$

Это дает недостающие два уравнения для определения произвольных постоянных.

Все промежуточные преобразования, носящие формальный характер, опускаем и, ограничившись этими общими замечаниями, позволяющими восстановить ход решений, приводим только окончательные результаты.

Значения внутренних сил в плоскости $(b,\ t)$ по длине пролета определяются так:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= P_x \cos\alpha + f_0 \sin\alpha\, \eta(\varphi); \\ P_b &= P_x \sin\alpha - f_0 \cos\alpha\, \eta(\varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (II.4)$$

где

$$\eta(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\varphi - \sin(\varphi - \nu)}{1 - \cos\nu}.$$

Нормальная поперечная сила

$$P_n = \frac{1}{2} f_0 \frac{\cos(\varphi - \nu) - \cos\varphi}{1 - \cos\nu} = -f_0 \frac{d\eta}{d\varphi}. \qquad (II.5)$$

Значения внутренних моментов в плоскости $(b,\ t)$

$$\left.\begin{aligned} L_t &= P_x r \sin\alpha + L_x \cos\alpha - r f_0 \cos\alpha\, \eta_t(\varphi); \\ L_b &= -P_x r \cos\alpha + L_x \sin\alpha + r f_0 \sin\alpha\, \eta_b(\varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (II.6)$$

где

$$\eta_t(\varphi) = \eta(\varphi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi \cos(\varphi - \nu) - (\varphi - \nu)\cos\varphi}{1 - \cos\nu};$$

$$\tau_{\omega}(\varphi) = \frac{\varphi \cos(\varphi - \nu) - (\varphi - \nu)\cos\varphi}{2(1 - \cos\nu)} r \operatorname{ctg}^2 \alpha - \tau_i(\varphi).$$

Изгибающий момент относительно нормали n

$$L_n = f_0 \frac{(\varphi - \nu)\sin\varphi - \varphi\cos(\varphi - \nu)}{2(1 - \cos\nu)} r \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (II.7)$$

Эти функции определены для первого пролета, расположенного в начале отсчета полярного угла φ, и имеют смысл только в промежутке $0 \leqslant \varphi \leqslant \nu$. Для всех последующих пролетов эти функции повторяются соответствующим смещением начала отсчета угла φ в начало пролета.

При линейном контакте проволок нагрузка f_n является равномерно распределенной, а внутренние силы в проволоке постоянны по величине. При этом в системах (II.1) и (II.2) сохраняются только первые уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_t P_n - \omega_n P_t &= -f_n; \\ \omega_t L_n - \omega_n L_t &= -P_n. \end{aligned}\right\} \qquad (II.8)$$

Остальные силовые факторы L_n и P_n обращаются в нуль.

Решая уравнения (II.8) совместно с (II.3), находим:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= P_x \cos\alpha + r f_n; \\ P_b &= P_x \sin\alpha - r f_n \operatorname{ctg}\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad (II.9)$$

$$\left.\begin{aligned} L_t &= P_x r \sin\alpha + L_x \cos\alpha - 2r^2 f_n \operatorname{ctg}\alpha; \\ L_b &= -P_x r \cos\alpha + L_x \sin\alpha + r^2 f_n \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (II.10)$$

Если отбросить контактную силу f_n, то получим известные соотношения для обыкновенной винтовой пружины, нагруженной осевой силой P_x и крутящим моментом L_x.

Во всех расчетах положительный крутящий момент L_x, действующий по оси каната, предполагается направленным в сторону закручивания свивки данной проволоки.

§ 12

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОТДЕЛЬНОЙ ПРОВОЛОКИ В СПИРАЛЬНОМ КАНАТЕ

В полученных выше решениях уравнений статики осталась неопределенной нормальная контактная нагрузка f_n.

Для этого рассмотрим задачу в упруго-линейной постановке и воспользуемся теоремой Кастилиано. Рассмотрим вначале круглую проволоку, выражение упругой потенциальной энергии для которой можно записать в таком виде:

$$U_s = \int_0^s U_0 ds, \qquad (II.11)$$

где

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_x^2}{EF} + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_x^2}{GI_p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_y^2 + L_z^2}{EI}. \qquad (II.12)$$

Коэффициенты EF, GI_p и EI есть общепринятые обозначения для продольной, крутильной и изгибной жесткостей проволоки.

Работой поперечных сил при вычислении потенциальной энергии деформации в проволоке, как и в других стержневых системах, можно пренебречь.

Под усредненной удельной потенциальной энергией будем подразумевать ее значение на длине проволоки, отнесенной к единице длины каната. Для точечного контакта проволок эта величина равна интегралу (II.11) по длине дуги пролета, разделенному на осевую длину пролета x, (I.50):

$$U = \frac{1}{x_\nu} \int_0^{s_\nu} U_0 ds = \frac{t}{\nu \cos \alpha} \int_0^{\nu} U_0 d\varphi. \qquad (II.13)$$

В соответствии с теоремой Кастилиано частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению системы в направлении действия этой силы. Частные производные по осевой силе P_x и крутящему моменту L_x, таким образом, равны продольному u и угловому v перемещениям проволоки в канате (см. рис. 20). Поскольку же в расчет вводится удельная потенциальная энергия, отнесенная к единице длины каната, то полученные таким образом смещения равны соответствующим деформациям:

$$\frac{\partial U}{\partial P_x} = \varepsilon; \quad \frac{\partial U}{\partial L_x} = \theta.$$

Для определения контактной силы f_0 будем пренебрегать поперечной податливостью спирального каната, по-

лагая опоры под проволокой абсолютно неподатливыми. Это позволяет частную производную по контактной силе приравнять нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial f_0} = 0.$$

Это приводит к системе трех канонических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f_n'\delta_{11} + P_x\delta_{21} + L_x\delta_{31} &= 0; \\ f_n'\delta_{12} + P_x\delta_{22} + L_x\delta_{32} &= 0; \\ f_n'\delta_{13} + P_x\delta_{23} + L_x\delta_{33} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (II.14)$$

где

$$f_n' = \frac{1}{s_v} f_n. \qquad (II.15)$$

Коэффициент δ_{11} для точечного контакта

$$\delta_{11} = \left(\frac{\lambda_1 \sin^2\alpha}{EF} + \frac{\lambda_2 r^2 \cos^2\alpha}{GI_p} + \frac{\lambda_3 r^2}{EJ}\right)\frac{r^2 \cos^2\alpha}{4\cos\alpha \sin^2\alpha}, \qquad (II.16)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\nu + \sin\nu}{\nu(1 - \cos\nu)}; \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}\lambda_1 + k_1 + k_2;$$

$$k_1 = \frac{\nu^2(2 + \cos\nu)}{8(1 - \cos\nu)^2}; \quad k_2 = \frac{\nu \sin\nu}{(1 - \cos\nu)^2};$$

$$\lambda_3 = k_1(1 + \cos^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha - k_2\cos^2\alpha - \frac{\lambda_1}{2}(2\cos 2\alpha + \cos\alpha).$$

При линейном контакте проволок получим

$$\delta_{11} = \frac{r^2}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{EF} + \frac{4r^2}{GI_p}\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{r^2}{EJ}\cdot\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^4\alpha}\right). \qquad (II.17)$$

Выражение (II.15) при этом принимает значение равномерно распределенной контактной нагрузки:

$$f_n = \lim_{\nu \to 0} f_n'.$$

Остальные коэффициенты не зависят от условий контакта проволок и соответствуют их значениям для обыкновенной винтовой пружины:

$$\delta_{22} = \frac{\cos\alpha}{EF} + \left(\frac{\sin^2\alpha}{GI_p} + \frac{\cos^2\alpha}{EJ}\right)\frac{r^2}{\cos\alpha}; \qquad (II.18)$$

$$\delta_{33} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2\alpha}{EJ}\right)\frac{1}{\cos\alpha}; \qquad (II.19)$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{r}{EF} - r^3\left(\frac{2}{GI_p} + \frac{\cos 2\alpha}{EJ\sin^2\alpha}\right); \qquad (II.20)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI}\right) r \sin\alpha; \qquad (II.21)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 2r^2\left(\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{EI} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{GI_p}\right). \qquad (II.22)$$

По своему механическому смыслу эти коэффициенты равны коэффициентам податливости проволоки. Так, коэффициенты в первом уравнении из (II.14) равны податливости проволоки в радиальном направлении под действием соответствующих сил, во втором уравнении — коэффициентам податливости в осевом, а в третьем — в тангенциальном направлениях.

Система канонических уравнений (II.14) может быть преобразована к такому виду:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= a\varepsilon + c\theta; \\ L_x &= c\varepsilon + b\theta \end{aligned}\right\} \qquad (II.23)$$

и

$$f'_\alpha = d\varepsilon + e\theta. \qquad (II.24)$$

Здесь обозначено:

$$a = \frac{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}{\Delta}; \; b = \frac{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}{\Delta}; \; c = \frac{\delta_{12}\delta_{13} - \delta_{11}\delta_{23}}{\Delta}; \qquad (II.25)$$

$$d = \frac{\delta_{13}\delta_{23} - \delta_{12}\delta_{33}}{\Delta}; \; e = \frac{\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{23}}{\Delta}; \qquad (II.26)$$

$$\Delta = 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} + \delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2.$$

При линейном контакте проволок эти коэффициенты удается упростить:

$$a = EF\cos^3\alpha + EI\frac{\sin^4\alpha}{r^2}\cos^3\alpha + GI_p\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\cos^2\alpha; \qquad (II.27)$$

$$b = EFr^2\cos\alpha\sin^2\alpha + GI_p\cos^7\alpha + \\ + EI(1 + \cos^2\alpha)^2\sin^2\alpha\cos\alpha; \qquad (II.28)$$

$$c = EFr\cos^2\alpha\sin\alpha + GI_p\frac{\cos^4\alpha}{r}\sin^3\alpha - \\ - EI(1 + \cos^2\alpha)\frac{\cos^2\alpha}{r}\sin^3\alpha; \qquad (II.29)$$

$$d = \left(EF - GI_p\frac{\sin^4\alpha}{r^2} - EI\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{r^2}\right)\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{r}; \qquad (II.30)$$

$$e = \left(EF - GI_p\frac{\cos^4\alpha}{r^2} + EI\frac{1 + \cos^2\alpha}{r^2}\cos^2\alpha\right)\sin^2\alpha\cos\alpha. \qquad (II.31)$$

Ввиду малости углов свивки, которые обычно не превышают 20°, в формулах (II.27) и (II.29) в практических расчетах, как показывают вычисления, можно ограничиться только первыми членами, зависящими от продольной жесткости проволоки.

В отличие от коэффициентов системы (II.14), эти выражения равны соответствующим коэффициентам жесткости свитой в канат проволоки.

Для линейного контакта проволок уравнения (II.14) в соответствии с выражениями (II.9) и (II.10) могут быть преобразованы:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{P_l}{EF} - \frac{2L_t}{GI_p} r \operatorname{ctg} \alpha + \frac{L_b}{EI} r \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 0;\\
&\frac{P_l}{EF} \cos \alpha + \frac{L_t}{GI_p} r \sin \alpha - \frac{L_b}{EI} r \cos \alpha = \varepsilon \cos \alpha;\\
&\frac{L_t}{GI_p} \cos \alpha + \frac{L_b}{EI} \sin \alpha = \theta \cos \alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (II.32)$$

Величины

$$\frac{P_l}{EF} = \varepsilon_s; \quad \frac{L_t}{GI_p} = \tilde{t}; \quad \frac{L_b}{EI} = \tilde{b} \qquad (II.33)$$

являются соответственно продольной, крутильной и изгибной деформациями проволок.

Решая систему уравнений (II.32) относительно этих деформаций, находим:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_s = \varepsilon \cos^3 \alpha + r\theta \sin \alpha \cos \alpha;\\
&\tilde{t} = \theta \cos^4 \alpha + \varepsilon \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{r};\\
&\tilde{b} = \theta (1 + \cos^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (II.34)$$

Полученные выражения соответствуют геометрическим уравнениям (I.81) и (I.88) при отсутствии радиального смещения проволоки. Этим самым доказано полное соответствие энергетического метода, основанного на теореме Кастилиано, и геометрических уравнений деформаций, которые относятся к линейному контакту проволок.

Изложенные расчеты относились к круглым проволокам. Для проволок с фасонным профилем в приведении к упругой линии их контакт можно рассматривать как линейный и расчет коэффициентов жесткости следует вести по формулам (II.27) — (II.31). Крутильную жесткость фа-

сонной проволоки GI_ρ следует определять общими методами теории упругости для кручения некруглых профилей. Так как при линейном контакте изгибающий момент $L_n = 0$, то осевой момент инерции I фасонного профиля проволоки будет относиться к оси b в сечении профиля (см. рис. 21).

§ 13

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ КАНАТА

Полученные выше решения относятся к канату, состоящему из одной проволоки. Если известна внешняя нагрузка на данную проволоку в виде осевой силы P_x и крутящего момента L_x, то, найдя из системы уравнений (II.23) деформации ε и θ, определим, таким образом, все деформации и силовые факторы в проволоке. Следовательно, для каната, состоящего из множества проволок, задача состоит в определении осевой силы P_x и момента L_x, приходящихся на каждую из проволок.

Осевое усилие и крутящий момент в поперечном сечении каната, очевидно, равны следующим суммам по всем проволокам:

$$T = \sum_i P_{xi}; \quad M = \sum L_{xi}$$

или в выражении посредством уравнений (II.23):

$$\left.\begin{aligned} T &= \sum (a_i\varepsilon_i + c_i\theta_i); \\ M &= \sum (c_i\varepsilon_i + b_i\theta_i). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.35)}$$

Далее будем предполагать, что упругие перемещения каната подчиняются гипотезе плоских сечений и неискривления радиусов. Это значит, что в данном поперечном сечении каната упругие линии всех проволок получают одинаковые продольные u и угловые v смещения. Следовательно, соответствующие деформации

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \theta = \frac{dv}{dx}$$

являются одинаковыми для всего поперечного сечения каната, и в уравнениях (II.35) их можно вынести за знак сумм.

При действии на канат концевых сил и моментов эта гипотеза находит достаточное обоснование. Рассмотрим

канат, состоящий из одной проволоки, один конец которого ($x = 0$) защемлен жестко, а второй ($x = l$) под действием приложенной к нему внешней нагрузки получает смещения $u(l)$ и $v(l)$. Так как смещения распределяются по длине каната по линейному закону, то для любого его промежуточного сечения можно записать:

$$u(x) = u(l)\frac{x}{l}; \quad v(x) = v(l)\frac{x}{l}.$$

На торцах каната проволоки соединены друг с другом жестко и поэтому получают одинаковые концевые смещения. Из предыдущих выражений видно, что при этом в любом сечении каната с координатой x все проволоки получают одинаковые смещения.

Отсюда следует также, что ввиду совместимости упругих смещений слоев проволок, несмотря на контактное давление между ними, внутренние силы трения не реализуются.

Это позволяет уравнения (II. 35) записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T &= A\varepsilon + C\theta; \\ M &= C\varepsilon + B\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (II.\ 36)$$

где суммы

$$A = \sum_i a_i; \quad B = \sum_i b_i; \quad C = \sum_i c_i \qquad (II.\ 37)$$

представляют собой обобщенные, или агрегатные, коэффициенты жесткости каната.

Спиральный канат может иметь различные направления свивки слоев проволок. При расчете этих коэффициентов одно из направлений свивки проволок, удобное для наружного слоя, следует принять положительным. Это отразится на величине коэффициента C, в который синус угла свивки входит в нечетной степени [(II. 27), (II. 28), (II. 29)].

Положительный крутящий момент M, приложенный к канату, направлен в сторону закручивания положительного направления свивки каната. Знаки углов свивки следует учитывать и во всех других расчетах.

Формулы (II. 36) представляют собой обобщенные уравнения статики каната при совместном растяжении

и кручении. Решения этих уравнений относительно деформаций можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \Delta_{11}T - \Delta_{12}M; \\ \theta &= -\Delta_{21}T + \Delta_{22}M, \end{aligned}\right\} \qquad (II.\ 38)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_{11} = \frac{B}{\Delta}; \quad \Delta_{22} = \frac{A}{\Delta}; \quad \Delta_{21} = \Delta_{12} = -\frac{C}{\Delta}; \\ &\Delta = AB - C^2. \end{aligned}\right\} \qquad (II.\ 39)$$

Эти выражения представляют собой обобщенные коэффициенты упругой податливости каната.

Далее схема расчета спирального каната может быть представлена следующим образом. При заданной внешней нагрузке на канат в виде осевого усилия T и крутящего момента M после определения соответствующим расчетом коэффициентов податливости (II. 39) по уравнениям (II. 38) находим обобщенные деформации каната ε и θ. По формулам (II. 23) и (II. 24) определяем распределение по отдельным проволокам силовой P_x, моментной L_φ и контактной f_n нагрузок. Затем в зависимости от условий контакта находим внутренние силы в поперечных сечениях проволок по формулам (II. 4) — (II. 7) или (II. 9), (II. 10). Для линейного контакта можно воспользоваться непосредственно формулами (II. 33) и (II. 34). После этого рассчитываем напряжения по формулам, приведенным в § 10.

Обобщение уравнения статики каната дает полную картину его агрегатных механических свойств при растяжении и кручении. Для механической системы число степеней свободы равно числу совместных уравнений, описывающих ее перемещения под действием внешней нагрузки. Для каната имеем систему двух уравнений Следовательно, он выступает как система с двумя степенями свободы, а отсюда следуют все его механические свойства как упругой системы с двумя степенями свободы.

Рассмотрим для этого основные частные случаи нагрузки, показанные схематично на рис. 24.

Случай 1. Пусть канат растягивается силой T (рис. 24, *а*), а его концы закреплены от вращения ($\theta = 0$). При этом легко получить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &T = A\varepsilon; \quad M = C\varepsilon; \\ &\varepsilon = \frac{T}{A}; \quad M = \frac{C}{A}T. \end{aligned}\right\} \qquad (II.\ 40)$$

Этот случай будем называть чистым растяжением каната.

Под действием растягивающего усилия в канате возникает крутящий момент, уравновешивающийся моментом в закреплении. Внешний реактивный момент M — положительный и направлен в сторону закручивания каната. Внутренний крутящий момент — отрицательный, следовательно, канат стремится раскручиваться.

Очевидно, при $\varepsilon = 1$ и $\theta = 0$ получим:

$$T = A; \quad M = C.$$

Следовательно, коэффициент A, равный силе, вызывающей единичную деформацию растяжения, есть жесткость каната при чистом растяжении. Коэффициент C в соответствии с установившейся терминологией в строительной механике будем называть коэффициентом влияния.

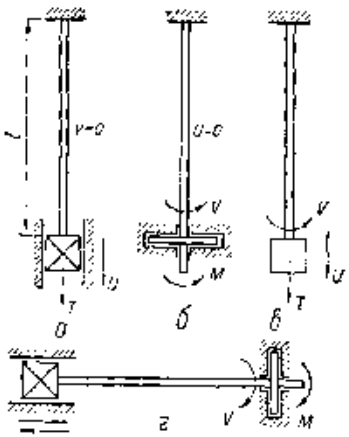


Рис. 24. Основные случаи внешней нагрузки на канат.

Случай 2. Если в первом случае убрать закрепление второго конца каната от вращения (рис. 24, *в*), то канат под действием внутреннего крутящего момента будет раскручиваться. Внешний момент при этом следует положить равным нулю. Таким образом, согласно (II. 38) получим:

$$\varepsilon = \frac{TB}{\Delta}; \quad \theta = -\frac{CT}{\Delta}. \qquad \text{(II. 41)}$$

Этот вид нагрузки будем называть свободным растяжением каната.

Отрицательное кручение означает, что канат раскручивается относительно положительного направления свивки.

Первое выражение (II. 41) можно переписать так:

$$\varepsilon = \frac{T}{A'},$$

где

$$A' = \frac{\Delta}{B} = A - \frac{C^2}{B} \qquad \text{(II. 42)}$$

есть жесткость каната при свободном растяжении, причем

$$A' < A.$$

Следовательно, удлинение каната при свободном растяжении за счет раскручивания будет большим, чем при чистом растяжении.

Случай 3. Пусть канат закручивается, а его концы закреплены от осевых перемещений (рис. 24, *б*).

При $\varepsilon = 0$ необходимые соотношения принимают следующую форму:

$$\left.\begin{aligned} &M = B\theta; \quad T = C\theta; \\ &\theta = \frac{M}{B}; \quad T = \frac{C}{B} M. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{II. } 43)$$

Этот вид нагрузки естественно назвать чистым кручением каната. Коэффициент B является жесткостью каната при чистом кручении. Коэффициент влияния C имеет двоякий механический смысл. При чистом растяжении он равен крутящему моменту в канате при $\varepsilon = 1$, при чистом кручении он равен осевому усилию при $\theta = 1$.

Случай 4. Если на канат действует только крутящий момент и его концы свободны (рис. 24, *г*), то внешнее осевое усилие, действующее на канат, равно нулю, и мы получаем:

$$\theta = \frac{MA}{\Delta}; \quad \varepsilon = -\frac{MC}{\Delta}. \qquad (\text{II. } 44)$$

Этот случай нагрузки на канат будем называть свободным кручением.

Жесткость каната на свободное кручение

$$H = \frac{\Delta}{A} = B - \frac{C^2}{A} < B. \qquad (\text{II. } 45)$$

Разделив уравнения (II. 44) одно на другое, можно записать такое соотношение:

$$\frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{u}{v} = -\frac{C}{A} = \text{const}. \qquad (\text{II. } 46)$$

Следовательно, точки каната, независимо от величины нагрузки, смещаются по винтовым линиям. При закручивании, когда $\theta > 0$, канат укорачивается, так как при этом $\varepsilon < 0$, и наоборот.

Между всеми разобранными четырьмя основными видами нагрузки легко установить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{M}{T}\right)_1 = -\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)_4 = \frac{C}{A};\\
&\left(\frac{T}{M}\right)_3 = -\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)_2 = \frac{C}{B};\\
&\left(\frac{\theta}{T}\right)_2 = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)_4 = \frac{C}{\Delta}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{II. } 47)$$

Здесь индексами при скобках указаны номера видов нагрузок.

Эти соотношения могут быть полезны при экспериментальном определении упругих констант каната.

На практике часто приходится иметь дело с одинаковыми по типу канатами или прядями, отличающимися лишь поперечными размерами. В пределах допусков на изготовление такие канаты можно считать геометрически подобными.

Исходя из теории подобия и размерностей, можно записать следующие соотношения для геометрически подобных канатов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2; \quad \frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4; \quad \frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3, \qquad (\text{II. } 48)$$

где d_1 и d_2 — какие-либо характерные размеры сравниваемых канатов, например их диаметры.

Отсюда можно получить соотношения для любых других механических характеристик канатов, зависящих от этих основных коэффициентов жесткости.

Анализируя полученные результаты, видим, что основное отличие агрегатных механических свойств спирального каната от сплошного изотропного стержня состоит в совместности уравнений статики (II. 36) при кручении и растяжении. Если при растяжении и кручении стержня его деформации, как известно из сопротивления материалов, определяются двумя независимыми уравнениями

$$EF\varepsilon = T; \quad GI_p\,\theta = M, \qquad (\text{II. } 49)$$

то для каната мы имеем систему двух уравнений (II. 36).

При растяжении стержня все внутренние силы в его поперечном сечении сводятся только к главному вектору T,

направленному вдоль оси каната, а при кручении — к главному моменту M. В канате при растяжении внутренние силы в его поперечном сечении сводятся к главному вектору T и главному моменту M, так же как и при кручении. В этом отношении канат подобен сплошному стержню с винтовой изотропией свойств.

Если коэффициент влияния C какими-либо конструктивными мероприятиями обратить в нуль, то при

$$C = 0 \qquad \text{(II. 50)}$$

канат по своим агрегатным механическим свойствам будет эквивалентен сплошному упругому изотропному стержню. При этом возникающий при растяжении крутящий момент, а при кручении — осевая сила взаимно уравновешиваются в канате. Такие канаты, в которых выполняется условие (II. 50), будем называть уравновешенными.

Исходя из полученных уравнений, можно записать удельную потенциальную энергию деформации каната в следующей форме:

$$U = \frac{1}{2} T\varepsilon + \frac{1}{2} M\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{BT^2 + AM^2 - 2CTM}{AB - C^2}. \qquad \text{(II. 51)}$$

Так как выражение потенциальной энергии есть определенно положительная квадратичная форма, то определитель системы (II. 36)

$$\Delta = AB - C^2$$

будет положительным.

То что в оба уравнения статики (II. 36) входит один и тот же коэффициент C, а в уравнениях (II. 38) $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, соответствует известной в строительной механике теореме Бетти о взаимности работ [80].

§ 14

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СПИРАЛЬНЫХ КАНАТОВ (ПРЯДЕЙ)

В качестве примера рассмотрим расчет двухслойной пряди, геометрическая характеристика которой дана в табл. 4.

Таблица 4

Геометрическая характеристика пряди 1 + 6 + 12

№ слоя проволок	Число проволок	d_1, мм	d_2, мм	α	Угол прогета	Длина прогета мм	Направление свивки
0	1	1,15	0	0	—	—	—
1	6	1,0	1,075	16°45′	—	—	Левая
2	12	1,0	2,075	16°10′	60°	7,8	»
2′	12	1,0	2,075	—16°10′	20°	2,96	Правая

Таблица 5

Расчетные коэффициенты для одной наружной проволоки с учетом точечного касания ($E = 1{,}9 \cdot 10^4$ кГ/мм²)

Тип свивки	φ	s_0, мм	a, кГ	b, кГ·см²	c, кГ·см
1 + 6 + 12 (ЛК)	0	0	13 222	56,0	794
1 — 6 + 12 (ТК)	20°	2,6	13 150	55,8	790
1 + 6 + 12 (ТК)	60°	7,8	11 550	49,8	692

В табл. 5 и 6* представлены необходимые расчетные коэффициенты при различных условиях контакта проволок наружного слоя. В табл. 7 даны результаты силового расчета при линейном контакте всех проволок в пряди.

Таблица 6

Коэффициент жесткости прядей с учетом точечного контакта

Тип свивки	φ	A, 10^3 кГ	B, кГ·см²	C, 10^3 кГ·см	$10^{-4}\Delta$, (кГ·см)²
1 + 6 + 12 (ЛК)	0	257	817	12,66	64,6
1 — 6 + 12 (ТК)	20°	256	815	6,96	160
1 + 6 + 12 (ТК)	60°	237	742	10,83	58,5

Из расчета можно сделать следующие заключения:

1. При чистом растяжении каната (пример 1, табл. 7), когда кручение равно нулю, напряжения в проволоках

---

* В системе СИ: A (н) = 9,81 A (кГ); B (н·м) = 9,81 · $10^{-4}B$ (кГ·см²); C (н·м) = 9,81 · $10^{-2}C$ (кГ · см); Δ (н²м²) = 9,62 · $10^{-8}\Delta$ (кГ² · см²); E (н/м²) = 9,81 · 10^4E (кГ/см²).

Таблица 7

Распределение усилий и напряжений * в типовой пряди 1 + 6 + 12 при линейном контакте проволок

№ по пор.	Нагрузка	Слой проволок	По слоям проволок T_k	По слоям проволок M_k	f_n, кГ/см	P_f	P_0	L_f	L_0	σ_p	σ_n	τ	σ_f^{max}
						кГ		10 кГ/см		кГ/мм²			
1	$T = 1000$ кГ $\theta = 0$ $M = 41{,}4$ кГ · см	0 1 2	70 310 620	0 8,8 35,6	— 39,6 20,1	70 53,5 53,5	— 0,08 0,02	— —0,62 —0,32	— —0,50 —0,25	74 68 68	— —5,0 —2,6	— —3,1 —1,6	74 73 70,6
2	$M = 10$ кГ · см $\theta = 0$ $T = 148$ кГ	0 1 2	0 29 119	0,15 1,53 8,32	— 4,3 4,1	— 5,4 10,6	— —0,1 —0,05	1,5 0,75 0,75	— 0,60 0,60	— 7,2 13,5	— 6,1 6,1	5,4 3,8 3,8	— 13,3 19,6
3	$T = 100$ кГ $M = 0$	0 1 2	20 54 26	—0,19 0,58 —0,39	— 6,0 0,6	20 8,6 1,8	— 0,16 0,07	—1,90 —1,14 —1,05	— —0,92 —0,85	21,9 10,5 2,4	— —9,3 —8,7	—7,0 —5,8 —5,4	21,9 19,8 11,1
4	$M = 10$ кГ · см $T = 0$	0 1 2	—30 —49 79	0,44 0,66 8,9	— —4,7 3,2	—30 —7,3 79	— —0,29 —0,15	4,4 2,45 2,34	— 1,96 1,86	—32 —6,7 10	— 20 19	15,8 12,4 11,8	32 26,7 29

* В системе СИ: $T\ (н) = 9{,}81\ T\ (кГ)$; $M\ (нм) = 9{,}81 \cdot 10^{-2}\ M\ (кГ \cdot см)$; $f_n\ (н/м) = 9{,}81 \cdot 10^2 f_n\ (кГ/см)$; $\sigma\ (н/м^2) = 9{,}81 \cdot 10^6 \sigma\ (кГ/см^2)$

от изгиба и кручения пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями растяжения.

2. В остальных случаях, когда угол поворота каната не равен нулю, все три компонента напряжений равноценны и ни одним из этих напряжений пренебречь нельзя.

3. Сравнивая случаи 1 и 2 или 3 и 4 (табл. 7), замечаем, что единичный крутящий момент вызывает в канате бо́льшие максимальные напряжения, чем единичное осевое усилие. Поэтому скручивание каната моментом более опасно, чем его растяжение.

4. Перерезывающее усилие в проволоках во всех случаях оказывается незначительным, и им можно пренебречь. При закручивании каната моментом (пример 4, табл. 7) наружный слой проволок испытывает растяжение, сердечник и внутренний слой проволок — сжатие, так что результирующее усилие в канате равно нулю.

Во внутреннем слое нормальное давление f_n получается отрицательным: проволоки испытывают давление извне. Это давление реализуется давлением со стороны наружного слоя, вследствие чего внутренние слои испытывают полную сжимающую нагрузку, не теряя устойчивости. Действительно, для примера 4 полное давление со стороны шести внутренних проволок

$$N_1 = 6f_n' = -6 \cdot 4{,}7 = -28{,}2\ кГ/см,$$

в то время как давление со стороны двенадцати наружных проволок

$$N_2 = 12f_n'' = 12 \cdot 3{,}2 = 38{,}4\ кГ/см.$$

Избыточное давление

$$N_1 + N_2 = 38{,}4 - 28{,}2 = 10{,}2\ кГ/см$$

передается центральной проволоке.

Если, например, в случае 4 изменить знак крутящего момента на обратный, т. е. не закручивать, а раскручивать канат, то знаки всех расчетных величин изменятся на обратный. Нагрузка f_n для второго слоя проволок является отрицательной, но это отрицательное давление извне ничем не реализуется, и происходит расслоение каната. При этом полученные расчеты теряют силу. Подробно это явление будет рассмотрено в § 17.

Таблица 8

Значение внутренних силовых факторов в наружной проволоке пряди 1 + 6 + 12 на опоре ($\varphi = 0$) и в средине пролета $\left(\varphi = \frac{\nu}{2}\right)$ при чистом растяжении усилием 300 · 10³ кГ

Тип прядн	ν	P_r, кГ		P_b, кГ		P_a, кГ		L_b, кГ см		L_t, кГ см	
		$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\nu}{2}$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\nu}{2}$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\nu}{2}$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\nu}{2}$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\nu}{2}$
1 + 6 + 12 (ЛК)	0	16 100		5,1		—		—3,7		0,9	
1 + 6 + 12 (ТК)	20°	15 900	16 000	45	—20	—775	0	31,5	—18,7	0,9	0,9
1 + 6 + 12 (ТК)	60°	15 100	15 300	385	—185	—2200	0	294	—167	—3,3	2,2

В табл. 8 и 9 представлены результаты силового расчета для наружной проволоки при различных условиях контакта для ее поперечных сечений в точках контакта ($\varphi = 0$) и в средине пролета ($\varphi = \nu/2$). Расчет выполнен для чистого растяжения пряди, как наиболее важного в работе пряди случая.

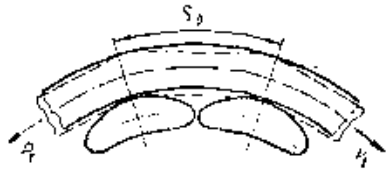


Рис. 25. Изгиб проволоки на опорах.

Для точечного контакта характерно возрастание поперечной силы P_b и появление силы P_a. Значительно также возрастает изгибающий момент L_b в плоскости начальной кривизны проволоки, который вызван изгибом проволок на опорах (рис. 25). Наибольшее значение имеют нормальные напряжения от растяжения и изгиба.

Для пряди 1 — 6 + 12 с переменным направлением свивки слоев проволок напряжения изгиба с уменьшением длины пролета контакта резко умень-

Таблица 9

Значения напряжений в наружной проволоке пряди 1 + 6 + 12 при чистом растяжении пряди усилием 300 кГ

Тип пряди	α	σ_p, кГ/мм²		σ_n, кГ/мм²		σ_l, кГ/мм²	
		$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
1 + 6 + 12 (ЛК)	0	20,5		∓0,38		$\frac{21}{20}$	
1 + 6 + 12 (ТК)	20°	20,3	20,4	±3,2	∓1,9	$\frac{23,5}{17,1}$	$\frac{18,5}{22,3}$
1 + 6 + 12 (ТК)	60°	19,3	16,9	±30	∓17	$\frac{49}{-11}$	$\frac{-0,1}{33,9}$

Примечание. Верхний знак и значения напряжений в числителе относятся к точке, выступающей наружу пряди, остальное — к точке, обращенной внутрь пряди.

шаются, приближаясь к их значениям для линейного контакта.

Принимая результирующие наибольшие нормальные напряжения σ_l в пряди ЛК за единицу, рост напряжений в прядях ТК в зависимости от направлений свивки можно выразить следующими значениями коэффициента концентрации напряжений:

Пряди	k
1 + 6 + 2 — ЛК	1,0
1 — 6 + 12 — ТК	1,13
1 + 6 + 12 — ТК	2,3

Отсюда видны все преимущества канатов ЛК, а также канатов ТК с переменным направлением свивки слоев проволок. При переменном направлении свивки слоев проволок, несмотря на увеличение углов их пересечения в точках контакта, заметного увеличения контактных напряжений, вычисленных по теории Герца, по сравнению с односторонней свивкой не наблюдается [8]. Это объясняется резким увеличением в первом случае

точек контакта на шаге свивки проволоки (см. § 6), что уменьшает контактную нагрузку и компенсирует рост контактных напряжений от увеличения угла пересечения проволок.

На рис. 26 показаны графики изменения коэффициентов жесткости этой пряди в зависимости от величины угла пролета контакта для наружных проволок. С увеличением углов пролета жесткость каната уменьшается за счет увеличения податливости проволок. Нулевой угол

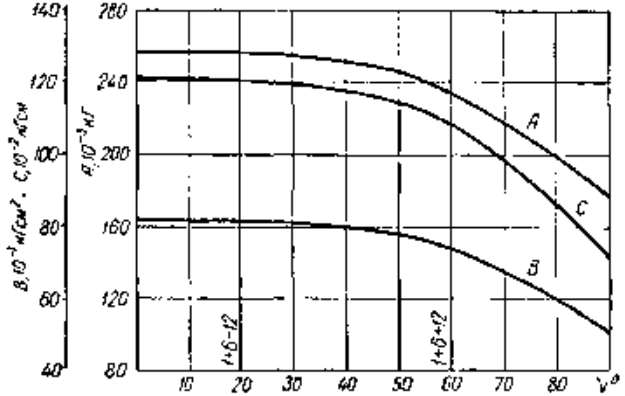


Рис. 26. Графики изменения коэффициентов жесткости в зависимости от величины угла пролета и контакта.

пролета соответствует линейному контакту. В обычных типовых прядях, свиваемых примерно с одинаковыми углами свивки, угол пролета не превышает 60° (см. § 6). Резкое снижение кривых на рис. 26 происходит за пределами углов 50—60°. Поэтому коэффициенты жесткости для таких прядей можно рассчитывать по схеме линейного контакта, что значительно сокращает вычисления. При одинаковой осевой нагрузке на прядь максимальные растягивающие напряжения в наружных проволоках (см. табл. 9) слабо зависят от углов контакта, поэтому их расчет также можно вести по схеме линейного контакта.

§ 15

КАНАТЫ ДВОЙНОЙ СВИВКИ

Канат двойной свивки отличается от спирального, как спиральный канат — от сплошной проволоки, т. е. механическими свойствами пряди.

Механические свойства пряди при кручении и растяжении заложены в уравнениях статики (II.36). Это позволяет осевое усилие P_t и крутящий момент L_t в пряди выразить через ее относительное удлинение $\varepsilon_{пр}$ и деформацию кручения $\tilde{t}_{пр}$:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= a_0\varepsilon_{пр} + c_0\tilde{t}_{пр}; \\ L_t &= c_0\varepsilon_{пр} + b_0\tilde{t}_{пр}, \end{aligned}\right\} \qquad (II.52)$$

где через a_0, b_0 и c_0 обозначены агрегатные коэффициенты жесткости пряди, свитой в канат.

Ограничимся рассмотрением однослойных канатов со сплошным сердечником, контакт прядей с которым с достаточной точностью можно считать линейным в приведении к оси пряди. Ранее уравнениями (II.32), (II.33), (II.34) было доказано полное соответствие геометрических уравнений (I.81) и (I.88) с энергетическим методом с точки зрения раскрытия статической неопределимости задачи, т. е. эти уравнения достаточно правильно отразили взаимосвязь перемещений и деформаций для винтового элемента каната. Это позволяет, не обращаясь к теореме Кастилиано, построить решение, основываясь на геометрических уравнениях.

В отличие от спирального каната радиус слоя прядей и их угол свивки будем обозначать соответственно через r_0 и β. Тогда в соответствии с (I.81) и (I.88) деформации пряди запишутся следующим образом:

относительное удлинение

$$\varepsilon_{пр} = \varepsilon\cos^2\beta + r_0\theta\sin\beta\cos\beta + \varepsilon_r\sin^2\beta; \qquad (II.53)$$

изгибная деформация

$$\tilde{b}_{пр} = \theta(1 + \cos^2\beta)\sin\beta\cos\beta + (\varepsilon_r - \varepsilon)\frac{\sin^2\beta\cos^2\beta}{r_0}; \qquad (II.54)$$

деформации кручения

$$\tilde{t}_{пр} = \theta\cos^4\beta - (\varepsilon_r - \varepsilon)\frac{\sin^3\beta\cos\beta}{r_0}. \qquad (II.55)$$

Обозначив через g_0 изгибную жесткость пряди, дополнительно к уравнениям (II.52) через деформацию (II.54) можно выразить изгибающий момент в пряди:

$$L_b = g_0\tilde{b}_{пр}. \qquad (II.56)$$

Далее в соответствии с уравнениями (II.8) для пряди находим

$$P_t = \frac{\sin^2\beta}{r_0} L_t - \frac{\sin\beta\cos\beta}{r_0} L_b; \quad f_n = \frac{\sin^2\beta}{r_0} P_t - \frac{\sin\beta\cos\beta}{r_0} P_b. \tag{II.57}$$

В результате с помощью этих соотношений все внутренние силовые факторы, действующие в поперечном сечении пряди, выражаются через деформации каната ε, ϑ и ε_r.

В отличие от цельностального спирального каната, поперечная податливость неметаллического сердечника канатов двойной свивки требует учета поперечной деформации каната ε_r.

Таким образом, остается найти зависимость между деформациями каната и приложенной к нему внешней нагрузкой. Для этого воспользуемся уравнениями статики по оси каната (II.31), которые в новых обозначениях запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_b \sin\beta + P_t \cos\beta; \\ L_x &= -L_b \sin\beta + L_t \cos\beta + (P_t \sin\beta - P_b \cos\beta) r_0. \end{aligned}\right\} \tag{II.58}$$

Подставив сюда значения всех силовых факторов (II.52), (II.56) и (II.57), выраженных посредством (II.53), (II.54), (II.55), через деформации каната, получим

$$\left.\begin{aligned} P_x &= a\varepsilon + c\vartheta + d'\varepsilon_r; \\ L_x &= c\varepsilon + b\vartheta + e'\varepsilon_r, \end{aligned}\right\} \tag{II.59}$$

где

$$a = a_0 \cos^3\beta - 2\frac{c_0}{r_0}\sin^3\beta\cos^2\beta + \\ + \frac{b_0 \sin^2\beta + g_0\cos^2\beta}{r_0^2}\sin^4\beta\cos\beta; \tag{II.60}$$

$$b = a_0 r_0^2 \sin^3\beta\cos\beta + b_0\cos^7\beta + \\ + g_0(1 + \cos^2\beta)^2\sin^2\beta\cos\beta + 2c_0 r_0\cos^4\beta\sin\beta; \tag{II.61}$$

$$c = a_0 r_0 \cos^2\beta\sin\beta + c_0(1 + \mathrm{tg}^4\beta)\cos^5\beta + \\ - \frac{b_0\cos^2\beta + g_0(1 + \cos^2\beta)}{r_0}\sin^3\beta\cos^2\beta; \tag{II.62}$$

$$d' = a_0\sin^2\beta - \frac{c_0}{r_0}\cos 2\beta\sin^3\beta + \\ - \frac{b_0\sin^2\beta + g_0\cos^2\beta}{r_0^2}\sin^4\beta\cos\beta; \tag{II.63}$$

$$e' = a_0 r_0 \sin^3\beta + c_0 \cos 2\beta \sin^2\beta \cos\beta - \frac{b_0 \cos^2\beta - g_0(1+\cos^2\beta)}{r_0} \sin^3\beta \cos^2\beta. \qquad (II.64)$$

Согласно второму уравнению из (II.57) аналогичным образом находим

$$f_n = (d'\varepsilon + e'\theta + g\varepsilon_r)\frac{\cos\beta}{r_0}, \qquad (II.65)$$

где

$$g = a_0 \frac{\sin^4\beta}{\cos\beta} - 2\frac{c_0}{r_0}\sin^5\beta\cos\beta + \frac{b_0 \sin^2\beta + g_0 \cos^2\beta}{r_0^2} \sin^4\beta \cos^2\beta. \qquad (II.66)$$

Представим, что контактная сила f_n представляет собой реакцию сердечника как упругого основания, тогда можно записать:

$$\varepsilon_r = -k_n f_n, \qquad (II.67)$$

где k_n — коэффициент поперечной податливости сердечника на внедрение пряди, определяемый из опыта.

Отсюда совместно с (II.65) находим

$$\varepsilon_r = -\mu\varepsilon - \mu\frac{e'}{d'}\theta, \qquad (II.68)$$

где величину

$$\mu = \frac{k_n d' \cos\beta}{r_0 - g k_n \cos\beta} \qquad (II.69)$$

будем называть коэффициентом сужения каната. При этом из опытов вместо k_n можно искать непосредственно коэффициент μ (II.69).

Подставив в (II.59) значение (II.68), получим

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= a'\varepsilon + c'\theta; \\ L_1 &= c'\varepsilon + b'\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (II.70)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a' &= a - \mu d'; \\ c' &= c - \mu e'; \\ b' &= b - \mu\frac{e'}{d'}. \end{aligned}\right\} \qquad (II.71)$$

Суммируя осевые силы и моменты по всем m прядям, получаем уравнения в форме (II.36)

$$\sum P_x = A\varepsilon + C\theta = T;$$
$$\sum L_x = C\varepsilon + B\theta = M$$

со следующими значениями коэффициентов жесткости каната:

$$A = \sum a_i'; \quad B = \sum b_i'; \quad C = \sum c_i'. \qquad (II.72)$$

Анализируя эти выражения, легко показать, что, полагая в них $p = 0$; $c_0 = 0$; $a_0 = EF$; $b_0 = GI_p$; $g_0 = EI$, получаем, как и следовало ожидать, все соотношения для спирального каната с линейным контактом проволок.

§ 16

ПОПЕРЕЧНОЕ СУЖЕНИЕ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ЖЕСТКОСТИ КАНАТА

Агрегатные коэффициенты жесткости каната (II.72) с неметаллическим сердечником во многом определяются его коэффициентом сужения (II.69). Вот почему этот вопрос требует специального рассмотрения. Сужение канатов под действием растягивающей нагрузки давно привлекает исследователей с различных точек зрения. К настоящему времени уже накоплен некоторый фактический материал по данному вопросу. Прежде всего следует отметить многочисленные опыты, проведенные Н. К. Гончаренко [41] в лаборатории рудничного подъема института горного дела АН УССР.

В этих опытах определялось относительное сужение канатов в зависимости от относительного удлинения без кручения (табл. 10). Сужение измерялось по внешнему диаметру каната, отношение которого к его продольной деформации было названо конструктивным коэффициентом

$$k = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon}; \quad \varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d}.$$

В наши расчеты входит относительное сужение ε_r по оси пряди. Чтобы воспользоваться этими опытными данными, необходимо произвести следующие преобразования. Приближенно будем считать, что сужение каната происходит только за счет неметаллического сердечника.

Таблица 10

Относительное сужение канатов в зависимости от относительного удлинения без кручения

№ конструкции	Конструкция каната	Диаметр каната, мм	Значение конструктивного коэффициента k при различном числе нагружения каната				
			1	2	3	4	5
1	6 × 19 + о. с.	25,0	4,9	3,3	2,5	2,5	1,2
2	6 × 19 — о. с.	21,5	4,6	3,1	2,8	2,7	1,5
3	6 × 37 + о. с.	39,0	3,6	2,8	2,3	2,0	1,7
4	12 (1 + 6/6 + 12) + + 6 (1 + 6) + + 6 (1 + 6/6 + 12) + + о. с.	25,4	1,1	1,2	0,8	0,9	0,7
5	12 (1 + 6/6 + 12) + + 6 (1 + 6) + + 6 (1 + 6/6 + 12) + + м. с.	25,4	0,55	0,5	0,5	—	—
6	10 (1 + 6/6 + 12) + + 5 (1 + 6) + + 5 (1 + 6/6 + 12) + + о. с	26,5	0,7	0,7	0,7	1,3	1,0
7	8 (1 + 6/6 + 12 + 12) + + 6 (1 + 6) + + 6 (1 + 6/6 + 12) + + о. с.	26,5	1,4	1,0	1,0	1,1	1,0
8	8 (1 + 6/6 + 12 + 12) + + 6 (1 + 6) + + 6 (1 + 6/6 + 12) + + м. с. 3 (1 + 6)	26,0	1,2	1,1	0,75	0,7	0,7

Тогда радиальное смещение пряди $\frac{1}{2}\Delta d$ по внешнему диаметру каната можно отнести ко всем ее точкам. Разделив это смещение на радиус оси пряди r_0 и приняв во внимание предыдущее выражение, получим

$$\varepsilon_r = -\mu\varepsilon = \frac{\Delta d}{2r_0},$$

откуда следует

$$\mu = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} - k\frac{d}{d_0}, \qquad (11.73)$$

где $d_0 = 2r_0$.

Для однослойного шестипрядного каната можно принять

$$\frac{d}{d_0} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Тогда $\mu = 1{,}5k$.

Таким образом, фактическая величина коэффициента сужения, приведенная к оси пряди, будет несколько большей, чем по внешнему диаметру каната.

Из этих опытов видно, что коэффициент сужения каната имеет весьма большие значения, особенно для новых, необтянутых канатов. Для многослойных канатов величина k намного уменьшается, но если, пользуясь полученной формулой, привести коэффициент к первому, внутреннему слою, то его величина будет близкой к значениям для однослойных канатов.

Рассмотрим однослойные канаты, для которых суммирование в формулах (11.72) сводится к умножению на число прядей m.

Углы свивки канатов обычно не превышают 20°. При этом синусы углов свивки получаются малыми по сравнению с их косинусами, тем более в высоких степенях. Это приводит к тому, что в коэффициентах A и C, так же как и для спиральных канатов, влиянием членов, связанных с изгибной g_0 и крутильной b_0 жесткостями пряди, зависящих от $\sin\beta$ в высоких степенях, в практических расчетах можно пренебречь.

Поэтому для практических расчетов после соответствующих подстановок и преобразований значения этих коэффициентов можно записать так:

$$A = ma_0(\cos^3\beta - \mu\sin^2\beta\cos\beta) \pm$$
$$\pm\, m\frac{c_0}{r_0}(2\cos^2\beta - \mu\cos 2\beta)\sin^2\beta; \qquad (11.74)$$
$$C = ma_0r_0(\cos^2\beta - \mu\sin^2\beta)\sin\beta \pm$$
$$\pm\, mc_0[(1 + \mathrm{tg}^4\beta)\cos^2\beta - \mu\cos 2\beta\sin^2\beta\cos\beta]. \qquad (11.75)$$

В случае больших значений μ и β следует, конечно, пользоваться точными формулами, ибо при определенных

условиях это упрощение может привести к нулевой или даже отрицательной продольной жесткости каната.

Система знаков направления углов свивки здесь остается такой же, как и в спиральных канатах.

Направление свивки прядей в канат принимаем положительным. Тогда для односторонней свивки проволок в прядь их угол свивки будет также положительным, а для крестовой — отрицательным.

От направления свивки проволок в прядях зависит знак только коэффициента c_0 для прядей, что и отражено в этих формулах. При односторонней свивке каната величина коэффициентов жесткости в связи с этим увеличивается, а при крестовой — уменьшается.

Увеличение продольной жесткости для каната односторонней свивки объясняется тем, что, как это следует из формулы (II.55), при растяжении каната прядь получает положительное кручение

$$\tilde{l}_{\varphi 0} = \varepsilon \cdot \frac{\sin^3 \beta \cos \beta}{r_0}.$$

При этом прядь односторонней свивки закручивается, а крестовой — раскручивается. Укорочение пряди односторонней свивки уменьшает общее удлинение каната, которое выражается в увеличении его продольной жесткости. При крестовой свивке происходит обратное явление.

Коэффициент C равен крутящему моменту, возникающему в канате, при его единичном относительном удлинении. Этот крутящий момент состоит из двух основных составляющих: из момента от свивки прядей в канат и из момента от свивки проволок в прядь. При односторонней свивке каната эти моменты в его поперечном сечении складываются, при крестовой — вычитаются.

Рассмотрим в связи с этим численные примеры. Для пряди типа $1 + 6 + 12 + 18$ из проволоки диаметром $\delta = 1{,}0$ *мм* при средних углах свивки $\alpha = 12°$, беря в расчет $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ *кГ/мм*^{2} и $G = 0{,}4E$, по формулам (II.27), (II.28), (II.29) и (II.37) получим следующие значения ее коэффициентов жесткости: $a_0 = 567\,500$ *кГ*; $b_0 = 2270$ *кГ·см*^{2}; $c_0 = 30\,650$ *кГ·см*.

Эти пряди идут на построение каната $6 \times 37 + о.\ с.$ диаметром $d = 22{,}5$ *мм*. Принимаем в расчет угол свивки прядей равным $\beta = 14°30'$ и $r_0 = 7{,}75$ *мм*.

Полагая коэффициент служения каната равным нулю, по формулам (II.74) и (II.75) получим:

$$A = 3\,090\,000 \pm 6900 = (3\,096\,900 \div 3\,083\,100)\ кГ;$$

$$C = 615\,300 \pm 153\,400 = (768\,700 \div 461\,900)\ кГ \cdot см,$$

где большие значения относятся к односторонней свивке каната, меньшие — к крестовой.

Наиболее важной характеристикой каната является его продольная жесткость.

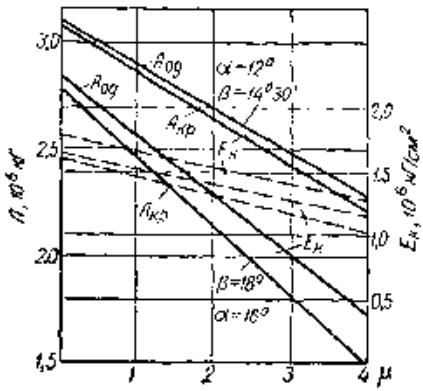


Рис. 27. Графики изменения продольной жесткости каната в зависимости от величины коэффициента сужения.

На рис. 27 верхними сплошными линиями показаны графики изменения коэффициента A для этого каната при различных значениях μ в пределах его возможных значений для канатов данного типа. Нижние прямые линии представляют тот же канат, но с более крутыми углами свивки: $\alpha = 16°$ и $\beta = 18°$.

Отсюда видно, что с увеличением углов свивки и коэффициента сужения μ происходит существенное уменьшение продольной жесткости каната. При этом заметно растет также разница между его значениями для односторонней $A_{оз}$ и для крестовой $A_{кр}$ свивки.

Штриховыми линиями показаны графики изменения условного модуля продольной упругости каната, вычисленные как отношение его продольной жесткости к суммарной площади металлического поперечного сечения проволок:

$$E_к = \frac{A}{F_с}.$$

Полученная таким образом величина $E_к$ хорошо сообразуется со многими экспериментальными данными, и прежде всего с расчетами и опытами А. Н. Динника [42]. Если в формуле (II.74) отбросить второй член и положить

$\mu = 0$, а в коэффициентах a_3 оставить только продольную жесткость проволок, то мы получим известное выражение этого коэффициента по А. Н. Диннику:

$$A = \sum EF \cos^3 \alpha \cos^3 \beta.$$

Далее, если принять, что все проволоки одинаковы и брать наклонные сечения проволок

$$F_c = \sum \frac{F}{\cos \alpha \cos \beta},$$

то после соответствующих сокращений условный модуль упругости каната по А. Н. Диннику запишется так:

$$E_к = E \cos^4 \alpha \cos^4 \beta.$$

Сохранив при этом коэффициент сужения μ, получим формулу П. П. Нестерова [73]:

$$E_к = E (1 - \mu \operatorname{tg}^2 \beta) \cos^4 \beta \cos^4 \alpha.$$

В обеих формулах для спиральных канатов следует положить $\beta = 0$.

А. Н. Динником обработано большое количество экспериментальных данных многих отечественных и зарубежных исследователей, часть из которых для примера приведена в табл. 11.

Таблица 11

Значения модуля упругости $E_к$ по экспериментальным данным

№ по пор.	Тип каната	$d_к$, мм	δ, мм	$E_к$ из опыта, кГ/мм²	$E_к$ по формуле А. Н. Динника, кГ/мм²	Разность, %	$E_к$ по формуле П. П. Нестерова, $\mu = 0$	Разность, %
1	Спиральный	5,7	1,0	19 500	18 500	+5	—	—
2	»	6,1	1,4	17 400	18 500	+6	—	—
3	6 × 27 + о. с.	26	1,4	13 700	16 400	+21	14 900	+8,8
4	6 × 16 + 7	35	2,4	13 000	14 900	+11	13 600	+4,6
5	6 × 14 + о. с.	34	2,6	15 000	16 500	+10	15 000	—
6	6 × 14 + о. с.	23	1,6	16 500*	17 600	+7	16 000	+3,0

* Свивка односторонняя.

Углы свивки канатов 3—6 указаны в пределах 11—19°. Нами в расчет принято их среднее значение 15° 30′.

Во всех случаях формула А. Н. Динника, не учитывающая сужение каната, дает завышенные результаты расчетов по сравнению с опытом в среднем на 10%, а иногда 15—20%. С поправкой на сужение по П. П. Нестерову формула дает вполне удовлетворительные результаты, если принять $\mu = 1$.

Таблица 12

Значения модуля упругости для новых канатов

№ по пор.	Диаметр каната, мм	Конструкция каната	Направление свивки	Модуль упругости нового каната, кГ/см²
1	24	6 × 19 + о. с.	Крестовая	550 000
2	24	6 × 19 + о. с.	Односторонняя	700 000
3	24	6 × 19 + м. с.	»	900 000
4	27	7 × 19 + о. с.	Крестовая	500 000
5	27	7 × 19 + о. с.	Односторонняя	600 000
6	31	6 × 19 + о. с.	Крестовая	650 000
7	31	То же	Односторонняя	670 000
8	33	6 × 19 + о. с.	Крестовая	600 000
9	50,5	6 × 37 + о. с.	»	550 000
10	50,5	То же	Односторонняя	650 000
11	50,5	» »	Крестовая	700 000*
12	50,5	» »	Односторонняя	800 000*

В табл. 12 приведены значения модуля упругости для новых канатов различных направлений свивки, позаимствованные из статьи А. С. Ильичева [48]. Эти опыты показывают большую разницу модулей упругости для канатов односторонней и крестовой свивки, что в общем хорошо подтверждает наши расчеты.

* Работавшие канаты.

Значение $\mu = 1$, принятое в табл. 11, указывает на то, что опыты А. Н. Динника относятся к обтянутым канатам, ибо, беря согласно табл. 10 для нового каната ориентировочно $\mu = 4$, получим намного заниженные результаты.

В подтверждение вышесказанного на рис. 28 приводятся диаграммы растяжения новых и работающих на кране канатов по данным Н. И. Коваленко [55]. По этим диаграммам для новых канатов $E_к = 7150 \div 9700$ *кГ/мм²*, для обтянутых в процессе работы на кране $E_к = 12\,700 \div 14\,300$ *кГ/мм²*.

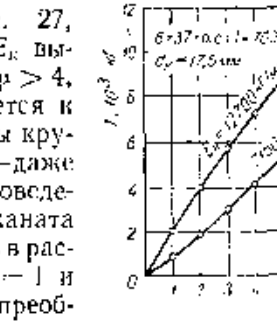


Рис. 28. Диаграммы растяжения крановых канатов.

Судя по рис. 27, первая величина $E_к$ выходит в область $\mu > 4$, вторая приближается к $\mu = 2$, а со стороны крутых углов свивки — даже к $\mu = 1$. Такое поведение обтянутого каната позволяет принять в расчет для него $\mu = 1$ и выполнить все преобразования в формулах (II.74), (II.75), понимая, что эти формулы усредненным образом соответствуют обтянутому канату.

Это вообще целесообразно из тех соображений, что все расчеты следует относить уже к работающему канату, ибо его обтяжка интенсивно протекает только в первые циклы работы (см. табл. 10). Поэтому весь срок службы, за исключением короткого начального периода, канат работает в обтянутом состоянии со стабильными характеристиками. Наряду с этим в работающем канате коэффициент сужения, стабилизируясь, все же остается не равным нулю.

Усреднение коэффициента сужения к единице приводит к следующим значениям рассматриваемых коэффициентов жесткости:

$$A = ma_0 \cos 2\beta \cos \beta \pm m \frac{c_0}{r_0} (4 \cos^2 \beta - 1) \sin^2 \beta; \quad (II.76)$$

$$C = ma_0 r_0 \cos 2\beta \sin \beta \pm$$

$$\pm mc_0 (\cos 2\beta + 4 \sin^4 \beta - \sin^2 \beta) \cos \beta. \quad (II.77)$$

Коэффициент крутильной жесткости каната B существенно зависит от изгибной и тем более от крутильной жесткостей прядей и не поддается подобным упрощениям. Это объясняется тем, что в отличие от продольного растяжения кручение каната сопровождается большим изгибом и кручением прядей.

Входящая в расчет изгибная жесткость прядей может быть принята равной сумме изгибных жесткостей всех проволок, составляющих прядь, с некоторым поправочным коэффициентом

$$g_0 = \xi \sum EI. \qquad (II.78)$$

Опыты показывают, что при изгибе ненапряженной пряди поправочный коэффициент ξ можно принимать равным единице. Для пряди в приведенном выше примере при $\xi = 1$ получим $g_0 = 370$ $кГ \cdot см^2$.

С натяжением изгибная жесткость пряди растет, что должно быть отражено введением поправочного коэффициента $\xi > 1$, который существенно зависит от конструкции пряди. Теоретическое освещение этого вопроса дано в главе V (§ 36).

Для анализа взаимодействия отдельных факторов в коэффициенте B рассмотрим его величину при $\mu = 0$:

$$B = ma_0 r_0^2 \sin^2\beta \cos\beta + mb_0 \cos^2\beta + \\ + mg_0 (1 + \cos^2\beta)^2 \sin^2\beta \cos\beta \pm 2c_0 r_0 \cos^4\beta \sin\beta. \quad (II.79)$$

При принятых в рассматриваемом выше примере численных данных получим:

$$B = 122\,800 + 10\,860 + 500 \pm 61\,100 = \\ = (195\,260 \div 73\,060)\ кГ \cdot см^2,$$

где большее значение относится к односторонней свивке каната, меньшее — к крестовой.

На рис. 29 и 30 показаны графики изменения основных коэффициентов жесткости и определителя $\Delta = AB - C^2$ для рассматриваемого каната $6 \times 37 + о.\ с.$ в зависимости от углов свивки прядей при различных значениях коэффициента сужения.

При этом весьма характерным является то обстоятельство, что коэффициенты податливости каната (II.39) при данной расчетной схеме практически слабо зависят от

коэффициента сужения каната. Так, например, при $\beta = 14^\circ 30'$ для односторонней свивки каната получим:

при $\mu = 0$

$$\Delta_{11} = 1{,}14 \cdot 10^{-5}\ 1/кГ;$$

$$\Delta_{22} = 22{,}8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{кГ \cdot см^2};$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = 3{,}65 \cdot 10^{-5} \frac{1}{кГ \cdot см};$$

при $\mu = 4$

$$\Delta_{11} = 1{,}46 \cdot 10^{-5}\ 1/кГ;$$

$$\Delta_{22} = 22{,}9 \cdot 10^{-5} \frac{1}{кГ \cdot см^2};$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = 5{,}70 \cdot 10^{-5} \frac{1}{кГ \cdot см}.$$

Аналогичную картину получаем и для крестовой свивки каната. Это позволяет при расчете коэффициентов податливости упростить вычисления, полагая $\mu = 0$.

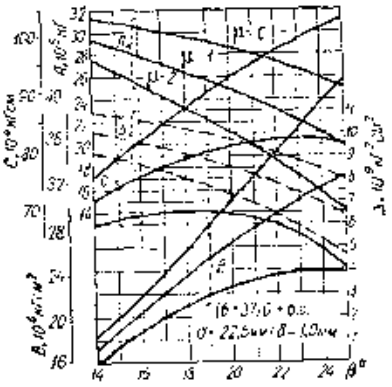


Рис. 29. Графики изменения коэффициентов жесткости в зависимости от угла свивки прядей для каната 6 × 37 + о. с. односторонней свивки диаметром 22,5 мм.

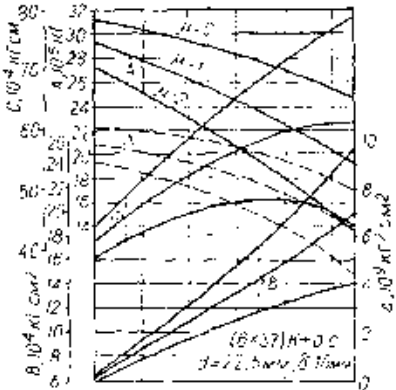


Рис. 30. Графики изменения коэффициентов жесткости в зависимости от угла свивки прядей для каната 6 × 37 + о. с. крестовой свивки диаметром 22,5 мм.

§ 17
РАСЧЕТ ВИНТОВЫХ МНОГОЖИЛЬНЫХ ПРУЖИН И ЯВЛЕНИЕ РАССЛОЕНИЯ КАНАТОВ

В § 14 было сказано, что при раскручивании спирального каната возможно расслоение слоев проволок. Это связано с тем, что наружный слой проволок в канате представляет собой систему с односторонней связью. Наружные проволоки имеют опоры только с внутренней стороны,

и перемещения проволок наружу ничем не ограничены. Положительное давление f_n действует на проволоку изнутри каната; отрицательное нормальное давление, направленное на внешние проволоки извне, не реализуется. Отделившийся слой проволок при этом работает как сумма параллельно соединенных винтовых пружин. Такое же явление наблюдается и в многослойных канатах двойной свивки. Отслоившиеся пряди при этом работают как многожильные пружины, расчет которых рассматривается в работах С. Д. Пономарева [78].

Эта теория особых возражений не вызывает, однако, несмотря на глубокий анализ работы однослойных жил, С. Д. Пономарев не приходит к уравнениям типа (II.52) и не охватывает этим самым жилы (пряди) сложных конструкций.

Не касаясь теории С. Д. Пономарева, расчет многожильных пружин можно получить как частный случай из теории расчета канатов.

Работа пружины отличается от работы проволоки или пряди в канате тем, что по всей длине она находится в свободном состоянии и не испытывает распределенной контактной нагрузки f_n. Поэтому решение задачи для расчета многожильной пружины можно получить из уравнений (II.59), найдя деформацию ε_r из (II.65), положив силу $f_n = 0$.

Отсюда находим

$$\varepsilon_r = -\frac{d'\varepsilon + e'\theta}{g}. \tag{II.80}$$

Подставив это значение в уравнение (II.59), получим

$$\left.\begin{aligned} P_r &= a''\varepsilon + c''\theta; \\ L_r &= c''\varepsilon + b''\theta, \end{aligned}\right\} \tag{II.81}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a'' &= a - \frac{d'^2}{g}; \\ b'' &= b - \frac{e'^2}{g}; \\ c'' &= c - \frac{d'e'}{g}. \end{aligned}\right\} \tag{II.82}$$

Дальнейший расчет ведется, как и для каната, при $f_n = 0$. В коэффициентах d' (II.63), e' (II.64) и g (II.66) существенное значение для расчетов имеют только первые

два члена, зависящие от коэффициентов a_0 и c_0. Для одножильных пружин, состоящих из круглых проволок ($a_0 = EF$), практическое значение имеют только первые члены. Поэтому, сохранив в этих формулах только первые члены для одножильной пружины, получим:

$$a_r = -\operatorname{ctg}^2 \alpha z - rb \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (11.83)$$

Формулы (11.82) в обозначениях, принятых для спиральных канатов, преобразуются при этом к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} a'' &= (EI \cos^2 \alpha + GI_p \sin^2 \alpha) \frac{\cos \alpha}{r^2}; \\ b'' &= (EI \sin^2 \alpha + GI_p \cos^2 \alpha) \cos \alpha; \\ c'' &= -(EI - GI_p) \frac{\sin \alpha}{r} \cos^2 \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (11.84)$$

Таким образом, для отделившегося слоя проволок или прядей их коэффициенты жесткости следует рассчитывать как для винтовых одножильных или многожильных пружин по формулам (11.82) или (11.84).

При расчете канат следует проверять на расслоение по знаку силы f_a в наружном слое проволок. Если сила окажется отрицательной, то канат расслаивается и расчет необходимо повторить, пересчитав коэффициенты жесткости для отслоившегося слоя по этим формулам. Такая проверка обычно нужна при раскручивании каната.

Для внутренних проволок сила f_a является результирующей давлений сверху и снизу, и поэтому при ее отрицательном значении необходимо проверить, обеспечивается ли это ее значение давлением сверху. Обычно знак силы f_a совпадает со знаком осевой силы в проволоке P_i, поэтому проверку на расслоение можно производить по знаку последней.

§ 18

МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Изложенная выше теория построена на общих принципах строительной механики и по своему существу особых возражений не вызывает. Однако, как и при решении любой другой инженерной задачи подобного рода, неизбежны элементы идеализации исследуемого объекта. Успех решения задачи зависит от того, насколько правильно

выбрана расчетная схема каната, насколько ею отражены главные факторы в канате, каково влияние неучтенных в расчете обстоятельств и предположительно отнесенных ко второстепенным. Ответ на этот вопрос можно дать только на основании сравнения результатов теории и опыта.

Опытная проверка настоящей теории может идти по двум направлениям. С одной стороны, можно измерять усилия и напряжения в отдельных проволоках каната, а с другой стороны, измерять на опыте агрегатные перемещения каната под нагрузкой.

Первое направление требует очень тонких опытов, которые в принципе могут быть выполнены современными методами электротензометрии. Однако в связи с очень малыми поперечными размерами проволок это представляет большие технические трудности, особенно если вопрос касается внутренних проволок. Поэтому многочисленные попытки в этом направлении не привели к желаемым результатам и по напряженному состоянию внутренних проволок в канатах до сих пор нет убедительных опытных данных.

Второй путь — путь измерения агрегатных упругих перемещений каната под нагрузкой — технически прост и ввиду большой величины этих перемещений, которые могут быть измерены элементарными средствами, обладает большой надежностью эксперимента. В этой части в литературе накоплено большое количество экспериментальных данных, полученных различными авторами. Опыты позволяют проверить саму систему агрегатных уравнений статики каната (II, 36) и его обобщенные коэффициенты жесткости A, B и C.

В § 16 было показано близкое соответствие полученного нами значения для коэффициента продольной жесткости A с соответствующими формулами А. Н. Динника, которые дают довольно близкие результаты к опытным данным для обтянутых канатов. В дополнение к этим сведениям в табл. 13 представлены результаты опытной проверки формулы для модуля продольной упругости спирального каната по данным Г. Скуратова [90]:

$$E_k = \frac{A}{F_c} = \frac{\sum EF \cos^3 \alpha}{\sum \frac{F}{\cos \alpha}}.$$

Таблица 13

Модуль продольной упругости спиральных канатов по данным Г. Скуратова

№ по пор.	Конструкция каната	z	Расчетные данные каната	Модуль упругости $E_к$, $кГ/мм^2$	
				из опыта	по расчету
1	1 + 3	4	$\delta = 2{,}0$ *мм*; $\alpha = 17^\circ 20'$; $E = 2{,}05 \cdot 10^4$ $кГ/мм^2$	16 500—17 000	17 100
2	1 + 6	6	$\delta = 2{,}0$ *мм*; $\alpha = 11^\circ 20'$; $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ $кГ/мм^2$	19 900	19 700
3	1 + 6	5,5	$\delta = 1{,}74$ *мм*; $\alpha = 11^\circ 05'$; $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ $кГ/мм^2$	19 400—19 800	19 700
4	1 + 3 + 9	8	$\delta = 2{,}0$ *мм*; $\alpha_1 = 17^\circ 20'$; $\alpha_0 = 17^\circ 10'$; $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ $кГ/мм^2$	17 850	18 050
5	1+6+12+18	5	$\delta = 0{,}68$ *мм*; $\alpha_1 = 16^\circ 10'$; $\alpha_2 = 14^\circ 45'$; $\alpha_0 = 14^\circ 13'$; $E = 2{,}28 \cdot 10^4$ $кГ/мм^2$	19 900	20 100

Таким образом, один из коэффициентов жесткости каната — коэффициент A — можно считать достаточно проверенным на опыте. Остается проверить остальные два коэффициента B и C. Коэффициент A проверен А. Н. Динником в условиях чистого растяжения путем измерения относительного удлинения каната ε при данной осевой нагрузке T. Коэффициент A находится из опыта в чистом виде из отношения

$$A = \frac{T}{\varepsilon},$$

где правая часть этого равенства берется из опытных данных.

Поставить аналогичный эксперимент по независимому получению из опыта коэффициентов B и C практически не представляется возможным. Поэтому из опыта легко удается получить только какую-то их комбинацию.

На опыте легко воспроизвести свободное кручение каната (см. рис. 24, *г*) на обычных испытательных машинах типа К-2 или К-3, в которых один конец каната закреплен во вращающемся патроне жестко, а второй закреплен от вращения, но может перемещаться свободно ($T = 0$). Измеряя угол закручивания каната, крутящий момент и продольные перемещения второго его конца, можно проверить формулы (II. 44), (II. 45), (II. 46). Нетрудно также воспроизвести свободное растяжение каната (см. рис. 24, *в*). Для этого к вертикально подвешенному канату подвешивается груз, который вызывает удлинение и поворот конца каната, что позволяет проверить формулы (II. 41). Чистое кручение каната (см. рис. 24, *б*) воспроизвести на опыте очень сложно, так как трудно избежать осевых смещений каната. Однако описанных опытов уже достаточно для проверки уравнений (II. 36) и оставшихся двух коэффициентов жесткости B и C.

Основным видом испытаний является чистое растяжение или свободное растяжение с раскручиванием. Это отражает наиболее вероятные случаи работы каната и позволяет извлечь из опытов основные интересующие нас в данном случае его механические характеристики.

Растяжение свободно подвешенным грузом или свободное растяжение для тонких канатов можно осуществить непосредственной подвеской груза к вертикальному отвесу каната. Для толстых канатов такой метод неудобен тем, что испытания при рабочих нагрузках требуют подвески больших грузов и сложного подъемного оборудования. Поэтому нами была применена специальная схема крепления канатов, позволяющая осуществить на обычной разрывной машине свободное растяжение.

Два совершенно одинаковых образца канатов, но свитых во всем в противоположные стороны так, что они представляли зеркальные отображения один другого, соединялись путем заливки баббитом предварительно расплетенных концов (рис. 31). Оставшиеся концы канатов также заливались баббитом и закреплялись на машине обычным образом. При растяжении такой последовательно соединенной пары канатов каждый из них стремится

раскрутиться и повернуть центральную соединительную бобышку. Если длина образцов выбрана одинаковой, то под действием каждого каната бобышка поворачивается на один и тот же угол: канаты раскручиваются синхронно, не мешая друг другу. При этом выполняются условия свободного растяжения каната, когда $T \neq 0$, а $M = 0$, и его деформации равны (II. 41). Таким образом, канат можно растягивать до разрыва. Испытания канатов на разрыв в условиях свободного растяжения до сих пор не производились.

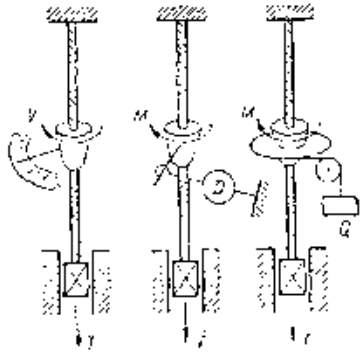


Рис. 31. Схема испытания канатов.

Этот метод крепления канатов позволяет измерять также крутящий момент, возникающий в канате при чистом растяжении. Для этого можно застопорить центральную бобышку специальным устройством, в цепь которого включен динамометр D (рис. 31), или удерживать ее от вращения грузом Q. Величина усилия, удерживающего канат от вращения при его растяжении, умноженная на плечо, даст крутящий момент. Так как крутящие моменты, возникающие в обоих канатах, при этой схеме складываются, то из опыта мы получаем удвоенное значение момента по отношению к формуле (II. 40). Рассмотрим вначале, как более простые, спиральные канаты.

Для упрощения обработки экспериментальных данных в табл. 14 представлены характеристики типовых прядей. Пересчет параметров на любой другой размер пряди по этим данным производится по формулам геометрического подобия (II. 48). В спиральном канате направление свивки слоев проволок влияет только на величину коэффициента C. В табл. 14 этот коэффициент вычислен при положительных углах свивки. В случае, если прядь имеет переменное направление свивки, то величину коэффициента C можно найти по этим же данным соответствующим вычитанием. Так, например, коэффициент C для пряди $1 - 6 + 12$ будет равен его величине для пряди $1 + 6 + 12$ с вычетом удвоенного значения C для пряди $1 + 6$ соот-

Характеристики типовых прядей *Таблица 14*

№ по пор.	Наименование пряди	Тип пряди	d, *мм*	Кратность свивки верхнего слоя	A, *кГ*	B, *кГ·см²*	C, *кГ·см*
1	ТК с нормальным шагом свивки	$1+6$	3,1	10	112 560 (25 390)	112 (61)	1960 (—23)
2		$1+6+12$	5,1	10,5	294 530 (34 120)	656 (159)	10 760 (—36)
3		$1+6+12+18$	7,1	11,0	567 490	2270	30 652
4	ТК с укороченным шагом свивки	$1+6$	3,15	7,3	108 250	143	2504
5		$1+6+12$	5,15	8,8	284 270	854	12 600
6		$1+6+12+18$	7,35	9,5	548 110	3025	35 600
7		$1+6+12+18+21$	9,15	9,8	897 910 (650 250)	8010 (3240)	76 400 (35 650)
8	ЛК — Варрингтон	$\frac{1}{2,3}+\frac{6}{2,2}+\frac{6}{2,3}\ \frac{6}{1,7}$	10,1	9	1 273 800	12 880	94 220
9	ТЛК — Закр Варрингтон	$\frac{1}{2,3}+\frac{6}{2,2}+\frac{6}{2,3}\ \frac{6}{1,7}\ \frac{18}{2,0}$	14,1	9,4	2 329 250	47 010	276 010
10	ЛК-3	$\frac{1}{1,26}+\frac{6}{1,2}\ \frac{6}{0,5}+\frac{12}{1,12}$	5,8	7,8	399 000	1660	20 200

Примечание. Пряди № 1—7, а также № 9 получаются последовательным добавлением слоя проволок к предыдущей пряди. Диаметр проволок в прядях № 1—7 равен 1,0 *мм*; диаметр центральной проволоки в прядях № 1—3 равен 1,1 *мм*, в прядях № 4—7 — 1,15 *мм*. Модуль упругости проволок $E = 2,1 \cdot 10^6$ *кГ/мм²*. В скобках указаны расчетные данные при расслоении всей пряди № 2, для пряди № 7 — только наружного слоя проволок.

ветствующей группы и т. д. Таким образом, можно найти величину коэффициента C для любой комбинации направлений свивки.

В дальнейшем при сравнении с опытными данными, если прядь подходит под типовую, то указывается только ее свивка, диаметр проволок и ее номер из табл. 14, величина коэффициентов жесткости A, B, и C определяется по формулам пересчета (11, 48). Если прядь не подходит под типовую, то приводятся все ее данные, необходимые для расчетов.

Модуль нормальной упругости проволок принят $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ *кГ/мм²*, модуль сдвига $G \approx 0{,}4E$, кроме особо указанных случаев. Так как модуль упругости стальных проволок колеблется незначительно, то для всех проволок его можно считать одинаковым и входящим в коэффициенты жесткости каната общим множителем. Это позволяет пересчитать данные на любые значения модуля упругости.

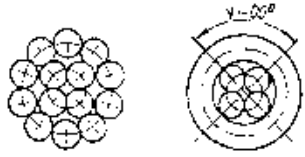


Рис. 32. Поперечное сечение спирального каната 4 + 10.

Для прядей ТК коэффициенты жесткости зависят от расстояния между точками контакта или от угла пролета (см. рис. 26). Расчет по схеме ТК требует очень высокой точности и представляет огромные вычислительные трудности. Расчет по схеме ЛК сравнительно прост. При больших углах пролета (70° и выше) расчет по схеме ЛК дает уже большую ошибку. В типовых прядях угол пролета не превышает 60° и их расчет (табл. 14) выполнен по схеме ЛК.

Для проверки на опыте ожидаемого снижения коэффициентов жесткости при больших углах пролета нами была специально изготовлена прядь 4 + 10 (рис. 32), в которой четыре центральные прямые проволоки для покрываемых их десяти проволок образуют опоры точно через 90°. Ниже приводятся расчетные данные для пряди 4 + 10:

α	14° 20′	d, *мм*	3,5
γ	90°	δ, *мм*	0,8
E, *кГ/см²*	$2 \cdot 10^6$	r, *мм*	1,35
A, *кГ*	95 200	A^*	131 000
B, *кГ · см²*	110,8	B^*	155
C, *кГ · см*	1860	C^*	3150

* Расчет по схеме линейного контакта

В табл. 15 представлены данные испытания пряди ТК 4 + 10.

Таблица 15

Испытания пряди ТК 4 + 10

Определяемая величина	Из опыта	По расчету	Расхождение, %
Жесткость при чистом растяжении A, *кГ*	102 000	95 200 (131 000) *	—6,7 (—28,4)
Отношение C/A при свободном кручении	0,205	0,196 (0,240) *	—4,4 (+17)
Угол раскручивания под действием свободно подвешенного груза при $l = 1,5$ *м*, $T = 200$ *кГ*	237°	240° (280°) *	— (+18)

Эксперимент дает прямое подтверждение снижения коэффициента A по сравнению с расчетом по схеме ЛК. Расчет по схеме ТК по всем трем параметрам хорошо согласуется с опытом, а расчет по схеме ЛК вызывает большие отклонения от опытных данных. Однако расчет по схеме ТК при больших углах пролета не всегда дает удовлетворительное совпадение с опытными данными по следующим обстоятельствам.

Наши расчеты выполнены в предположении, что ось проволоки в спиральном канате имеет форму математической винтовой линии. При растяжении каната проволока между опорами прогибается и несколько выпрямляется (см. рис. 25). Это выпрямление, не сопровождающееся удлинением ее оси, вызывает удлинение ее проекции на ось каната. Этим самым вследствие прогибов проволок на пролетах увеличивается общее удлинение каната, и его жесткость снижается. Это явление и отражено в наших расчетах.

Фактически при большой длине пролетов ось проволоки не будет точной математической винтовой линией. Проволока укладывается в канат с натяжением, под действием которого на участках между точками опоры она стремится

* Расчет по схеме линейного контакта.

уложиться по прямой линии. Если бы проволока была абсолютно гибкой, то она просто приняла бы форму пространственной ломаной линии, прямые отрезки которой были бы хордами нашей расчетной математической винтовой линии. Это, конечно, вносит некоторую ошибку в наши расчеты, которая будет тем большей, чем больше длина пролета.

В производстве известно такое влияние, как западание проволок в прядях с точечным касанием проволок. Это западание проявляется в том, что наружный слой проволок часто не укладывается в прядь, и одна из проволок получается как бы лишней. Если в этой пряди, не изменяя других параметров, просто изменить направление свивки наружного западающего слоя проволок относительно внутрилежащего слоя, то сразу же наступает нормальная укладка проволок. Это как раз и объясняется тем, что при свивке проволок в одну сторону пролет сравнительно велик и проволоки уже при свивке прогибаются в середине пролета, перемещаясь ближе к центру пряди и вытесняя друг друга. При свивке проволок в разные стороны длины пролетов, а следовательно, и технологические прогибы резко уменьшаются, и происходит нормальная укладка без западания. Это явление известно многим практикам и оно убедительно показывает существование начальных прогибов проволок на пролетах, отклоняющих их оси от точных математических винтовых линий.

Существование начальных прогибов хорошо подтверждается также тем, что, если в качестве сердечника взять, например, три или четыре прямые проволоки, то прядь не получается круглой, а приближается в сечении к трехграннику или четырехграннику. Чтобы избежать западания проволок, в пряди с точечным касанием и большими пролетами требуется очень тщательное ее изготовление с минимальным натяжением проволок.

По этому поводу мы приводим следующий пример. Нами было изготовлено несколько прядей типа 1+6+12 таким образом, что угол свивки наружного слоя проволок был постоянным и равным 16°, угол свивки внутренних проволок в различных образцах был различным и изменялся в пределах от 19 до 15°. Этим самым изменялся угол пролета для наружных проволок от 43 до 70°. Пряди в целом испытывались очень тщательно на растяжение, и измерялась их жесткость при растяжении A.

Затем такими же испытаниями определялось значение коэффициента A_1 для внутреннего слоя. Разность $A - A_1$ определяла значение A_2 для наружных проволок. Результаты испытаний приведены в табл. 16.

Таблица 16

Результаты испытаний пряди 1 + 6 + 12 при $\delta_0 = 1{,}8$ *мм*, $\delta = 1{,}7$ *мм*, $E = 2 \cdot 10^4$ *кГ/мм²*

№ по пор.	α_1	α	Из опыта (при $T = 1600$ кГ)			A_1 по расчету	Расхождение, %
			A	A_1	A_2		
1	19°	43°	740	276	464	472	+1,7
2	17°	57°	740	294	446	440	—1,3
3	16°	66°	740	299	441	420	—4,3
4	15°	70°	742	310	432	376	—13,0

Из опытов видно, что имеется тенденция к снижению коэффициента A по мере увеличения угла пролета. Однако интенсивность снижения получается значительно меньшей, чем по расчету, хотя среднее совпадение расчетов с опытом получается удовлетворительным. При дальнейшем увеличении угла пролета не происходит заметного снижения жесткости пряди. Это свидетельствует о том, что возможность прогибания проволок в середине пролета практически исчерпывается начальными технологическими прогибами.

С этой точки зрения наш расчет, основанный на предположении, что ось проволоки в прядях ТК является точной математической винтовой линией, является до некоторой степени условным и его применение ограничено сравнительно небольшими длинами пролетов или специальной технологией свивки прядей, когда технологическими прогибами можно пренебречь. В остальных случаях при наличии начальных технологических прогибов такой расчет даст заниженную жесткость прядей. Это дает дополнительное основание для возможности применения расчета по схеме ЛК к прядям ТК.

Прежде чем перейти к изложению основных опытов, необходимо выяснить характер кривых деформаций каната под нагрузкой. Полученные обобщения уравнения статики с постоянными коэффициентами жесткости представляют линейную теорию деформаций каната, и поэтому степень

линейности фактических деформаций имеет большое значение для применимости данной теории. На рис. 33 показаны кривые нагрузки и разгрузки спирального каната (пряди) при растяжении свободно подвешенным грузом.

Расчетные данные пряди: $1 + 6 + 12$; $\delta = 1{,}4$ *мм*; $\alpha_1 = 13°$; $\alpha_2 = 12°30'$; $A = 571\,300$ *кГ*; $B = 2260$ *кГ см²*; $C = 28\,100$ *кГ·см*. Суммарная площадь поперечного сечения проволок $F_c = 29{,}26$ *мм²*. Штриховыми линиями показаны расчетные прямые деформаций.

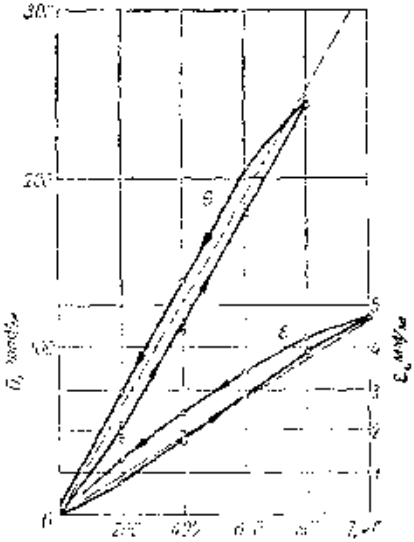


Рис. 33. Диаграммы растяжения и кручения пряди $1 + 6 + 12$.

Графики деформации пряди имеют явно выраженный линейный характер с незначительной площадью петли гистерезиса. Максимальная нагрузка достигает 800—1000 *кГ*, что соответствует усредненным напряжениям в пряди

$$\sigma_{ср} = \frac{T}{F_c} =$$

$$= (27 \div 35)\ кГ/мм^2.$$

Если принять предел прочности проволок равным 180 *кГ/мм²*, то максимальная нагрузка соответствует пяти — семикратному условному запасу прочности пряди при разрыве.

Аналогичные кривые нагружения получаем и для всех других прядей, подвергнутых испытаниям. Это позволяет сделать следующие выводы:

1. В пределах рабочих растягивающих нагрузок спиральные канаты (пряди) деформируются линейно.

2. Площадь петли гистерезиса, ограниченная линиями нагрузки и разгрузки, хотя естественно больше, чем в сплошном стальном прутке, но не настолько велика, чтобы учитывать это явление в расчетах.

Последний вывод касается отброшенных нами внутренних сил трения между проволоками в канате. Таким

образом, учет сил трения был бы неоправданным усложнением расчета.

Исходя из вышеизложенного, в дальнейшем нет необходимости приводить диаграммы нагружения всех испытанных образцов спиральных канатов, а можно ограничиться отдельными точками по линии нагружения.

Таблица 17

Испытания прядей на свободное кручение

№ по пор.	Тип пряди	δ, *мм*	d, *мм*	№ пряди	Отношение C/A		Расхождение, %
					из опыта	по расчету	
1	$1+6+12$	1,0	—	2	0,34	0,37	+8,1
2	$1+6+12$	1,4	—	2	0,48	0,52	+8,3
3	$1+6$	1,8	—	1	0,29	0,31	+7,6
4	$1+6+6/6$	—	7,65	8	0,52	0,56	+7,7
5	$(1+6+6/6)+18$	—	10,7	9	0,83	0,90	+8,4

В табл. 17 показаны результаты испытаний прядей из табл. 14 на свободное кручение с измерением отношения (11.46)

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{a}{\theta} = -\frac{C}{A}.$$

Расхождения расчетов с опытами, как видим, не превышают 10%. Поскольку же коэффициент A достаточно проверен в опытах А. Н. Динника, то это отношение дает убедительную проверку коэффициенту C.

Результаты испытаний прядей на свободное растяжение (11.41) с измерением угла поворота и удлинения представлены в табл. 18. Эти опыты включают комбинации всех трех коэффициентов жесткости A, B и C. Максимальные отклонения расчетных и опытных данных находятся в пределах $\pm 15\%$.

В этих опытах испытаниям была подвергнута прядь с пеньковым сердечником № 4 конструкции $0+11+17$.

Прядь с пеньковым сердечником более податлива в поперечном направлении и при растяжении утончяется несравненно больше, чем цельностальная. Поскольку же в расчетах изменение диаметра прядей как второстепенный фактор нами не учитывается, то этот опыт был предпринят в целях проверки приемлемости указанного допущения к прядям с пеньковым сердечником. Опыт показывает, что в качестве первого приближения это вполне приемлемо.

Таблица 18

Испытание спиральных канатов на свободное растяжение

№ по пор.	Тип каната	Диаметр проволок, *мм*	№ каната	Нагрузка, *кГ*	Угол раскручивания на 1 *м* длины, *град*		Расхождение, %	Удлинение на 1 *м* длины, *мм*		Расхождение, %
					на опыта	по расчету		на опыта	по расчету	
1*	1 + 6	2,6	—	250	21	24,5	+ 16,7	0,615	0,56	—9,0
2	1 + 6 + 12	1,41	2	600	180	172	—4,5	2,82	2,58	—8,5
3	1 + 6	1,8	1	100	25	22	—12	0,47	0,40	—15
4	0+11+17 **	1,2	—	500	410	470	+15	11,0	11,3	+2,7
5	1 + 6	1,4	1	600	315	280	—11	4,6	3,9	—15

В табл. 19 представлены аналогичные опыты, позаимствованные из статьи Дреера [105], с измерением только углов раскручивания спиральных канатов. В этих опытах испытывались спиральные канаты довольно сложной многослойной конструкции с различными вариациями в направлениях свивки слоев проволок (см. также табл. 14). Согласование расчетов с опытными данными и здесь получается достаточно хорошим, за исключением последнего каната № 7, для которого ошибка расчетов соста-

* Опыт К. В. Ковалева [58].
** $d = 9{,}0$ *мм*, $\alpha = 21°$.

Таблица 19

Испытания спиральных канатов на раскручивание от свободно подвешенного груза

№ по пор.	Тип свивки	№ каната	Нагрузка, *кГ*	Угол раскручивания на 1 м длины, *град*		Расхождение, %
				из опыта	по расчету	
1	1 + 6	4	100	170	171	—
2	1 + 6 + 12	5	200	201	197	—2,0
3	1 — 6 + 12	5	200	49	53	+8,2
4	1 + 6 + 12 + 18	6	300	181	173	—4,4
5	1 + 6 — 12 + 18	6	300	19	20	+5,2
6	1 — 6 + 12 — 18 + 24	7	500	11,1	12,5	+12,6
7	1 + 6 + 12 + 18 + 21	7	500	214	(180)	(—16)
7*	То же, с учетом расслоения	7	500	214	214	—

Примечание. Модуль упругости проволок по данным в статье [105] равен $1{,}9 \cdot 10^6$ *кГ/см²*.

вила 16%. Более детальный анализ показывает, что здесь мы имеем дело с расслоением внешнего слоя проволок под действием сжимающего усилия, описанного в § 17, когда слой проволок работает как сумма параллельно соединенных винтовых пружин.

Расчет осевых усилий по формулам (II.33) и (II.34), начиная с центрального сердечника, для канатов № 6 и 7 из табл. 19 дает следующие результаты.

Для каната № 6

$$P_t = +8{,}9;\ +9{,}0;\ +6{,}7;\ +10{,}5;\ +5{,}25\ (кГ);$$

Для каната № 7

$$P_t = +44{,}7;\ +28{,}2;\ +18{,}1;\ +6{,}8;\ (-4{,}15)\ кГ.$$

Отрицательное усилие в поверхностном слое проволок не реализуется, и расчет следует повторить, учитывая его отслоение. Коэффициенты жесткости для проволок этого слоя определяем по формулам (II.84), коэффициенты для остальных слоев проволок остаются прежними. Результаты пересчета коэффициентов жесткости даны в табл. 14 для каната № 7 в скобках. После пересчета коэффициентов жесткости получаем полное согласование расчетов с опытом. Картина осевых усилий в проволоках по слоям в канате в результате пересчета изменяется следующим образом:

$$P_z = +47; \quad +28{,}1; \quad +15{,}6; \quad +2{,}5; \quad 0{,}0 \ (кГ).$$

Если бы и сейчас расчет для предпоследнего слоя проволок показал отрицательное усилие, то это означало бы, что расслоение проникает в глубь каната до этого слоя и т. д.

Таблица 20

Опыты по определению жесткости прядей при свободном кручении *

№ по пор.	Тип пряди	Диаметр проволоки, мм	№ пряди	Жесткость при кручении, кГ · см²		Расхождение, %
				по опыту	по расчету	
1	1 + 6	1,23	1	170	181	+6,5
2	1 + 6	1,41	1	320	312	—2,5
3	1 + 6	1,80	1	714	830	—16,2
4	1 + 6 + 12	0,8	2	102 (73)	106 (65)	+4 (—11)
5	1 + 6 + 12	1,0	2	244 (174)	261 (159)	+7 (—8,6)
6	1 + 6 + 12	1,2	2	577 (345)	542 (330)	—6 (—4,3)

В табл. 20 представлены результаты определения жесткости прядей (II.45) при свободном закручивании и рас-

* В скобках указаны результаты при раскручивании прядей с расслоением.

кручивании по данным опытов К. В. Ковалева [54]. На раскручивание испытаны здесь только последние три двухслойные пряди типа $1 + 6 + 12$. Следует также учитывать расслоение прядей при раскручивании, которое в этом случае охватывает все слои проволок.

В заключение описания опытов со спиральными канатами на рис. 34 приводим результаты комплексных испытаний пряди типа $1 + 6$ с определением коэффициентов A, H и отношения $\frac{C}{A}$ в зависимости от угла свивки пряди. Расчетные данные пряди: $1 + 6$; $\delta_0 = 1{,}8$ *мм*; $\delta = 1{,}7$ *мм*; $\alpha = 12 \div 19°$; $E = 2 \cdot 10^4$ *кГ/мм²*.

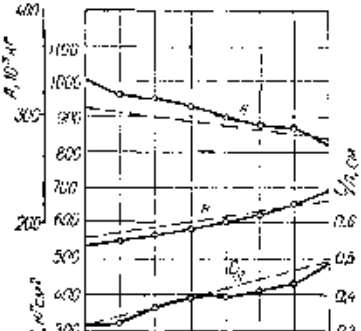


Рис. 34. Графики изменения расчетных и экспериментальных коэффициентов жесткости для пряди $1 + 6$ диаметром 5,2 *мм*.

Этот опыт был предпринят с целью выяснения влияния углов и плотности свивки на степень точности расчета. Плотность укладки проволок увеличивается с увеличением углов свивки, а вместе с этим растут силы трения. При дальнейшем увеличении угла свивки свыше 19° проволоки вообще не укладываются. Согласование расчетов с опытами по всем трем параметрам получается удовлетворительным не только по количественным данным, но и по характеру их изменения в функции от угла свивки. С увеличением плотности свивки в области больших углов свивки жесткость пряди на закручивание H начинает расти быстрее, чем по расчетной кривой. Это объясняется усиливающимся влиянием сил трения при плотной свивке проволок.

Кроме этого, следует привести опытные данные по изменению шага свивки прядей при кручении. Это позволяет проверить геометрическую формулу (I.89) для приращения шагов свивки. Одновременно проверяется и формула (I.81) для приращения углов свивки, которая положена в основу вывода первой.

Для свободного кручения имеет место соотношение (II.46), поэтому формула (I.89) здесь запишется так:

$$\delta h = -\left(\frac{C}{A} + \frac{h}{2\pi}\right) h\theta.$$

С. Т. Сергеевым [71] производились измерения изменений шага свивки в пряди при свободном закручивании. Сравнение расчетов по этой формуле с опытами С. Т. Сергеева дано в табл. 21. Измерение шага свивки производилось с помощью микроскопа УИМ-21.

Таблица 21

Изменение шага свивки при свободном закручивании пряди 1 + 6 + 12 типа 2 (диаметр проволок 1,2 *мм*; длина образца 600 *мм*)

№ по пор.	Угол закручивания, радиан	Приращение шага свивки, *мм*	
		из опыта	по расчету
1	2π	0,965	1,05
2	4π	1,937	2,10
3	6π	2,967	3,15

Переходя к рассмотрению канатов сложной свивки, необходимо прежде всего представить опытные кривые их деформаций. На рис. 35 показаны результаты испытаний на свободное растяжение с раскручиванием для канатов $6 \times 37 + о.\ с.$ диаметром 16 *мм* при различных вариантах свивки прядей, представленных в табл. 22. В отличие от спиральных канатов (см. рис. 33), здесь обнаруживается значительная нелинейность деформаций. Поэтому совпадения теории с опытом можно ожидать только в начале кривой нагружения. Разрывная прочность этого каната при пределе прочности проволок 180 *кГ/мм²* составляет примерно $P_c = 15\,500$ *кГ*. Рабочая нагрузка, соответствующая, например, шестикратному запасу прочности, $T = 2500$ *кГ*. На рис. 35 кривые нагружения канатов ограничены усилиями 500 и 1000 *кГ*, ибо при дальнейшем увеличении нагрузки графики сильно искривляются. Нелинейность деформаций каната при раскручивании обусловлена значительными изменениями его углов свивки. Таким образом, для однослойных канатов с органическим сердечником линейная теория в данном случае имеет ограниченное применение.

Однако стальные канаты, как правило, не работают на большое раскручивание, а в отдельных специальных

случаях во избежание этого явления применяют так называемые некрутящиеся канаты. Поэтому построение нелинейной теории деформаций канатов не имеет особого практического значения.

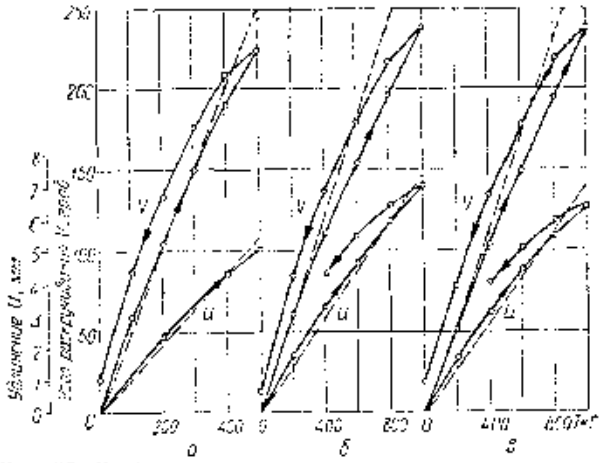


Рис. 35. Графики растяжения и раскручивания канатов 6 × 37 + о. с. крестовой свивки диаметром 16 мм и длиной 1 м при различных вариантах свивки прядей: а — 1 — 6 + 12 + 18; б — 1 + 6 — 12 + 18; в — 1 — 6 — 12 — 18.

Если растяжение каната не сопровождается значительным раскручиванием, его деформации можно считать линейными. Это видно из диаграммы чистого растяжения канатов типа 6 × 37 — о. с. на рис. 28.

Таблица 22

Механическая характеристика канатов (6 × 37) К — о. с. диаметром 16 мм ($\alpha = 12°$; $\beta = 14°30'$; $\delta = 0{,}7$ мм)

№ по пор.	Тип пряди	C_0 для пряди, кГ · см	$A \cdot 10^{-3}$, кГ	$B \cdot 10^{-3}$, кГ · см²	$C \cdot 10^{-3}$, кГ · см	$\Delta 10^{-3}$ кГ · см²
1	1—6—12+18	9200	1557	20,2	172	195
2	1+6—12—18	4460	1536	26,6	193	260
3	1—6—12+18	3100	1530	25,4	190	390

На рис. 36 показан график раскручивания при свободном растяжении для двухслойного каната № 2 из табл. 26. При пределе прочности проволок 160 $кГ/мм^2$ суммарное разрывное сопротивление этого каната составляет $P_c = 5700$ $кГ$. Из диаграммы видно, что линейность деформаций этого каната при растяжении с раскручиванием сохраняется до нагрузки порядка 2000 $кГ$, что составляет менее чем трехкратный запас прочности.

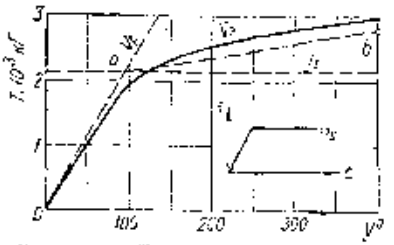


Рис. 36. График раскручивания под действием свободно подвешенного груза для двухслойного каната (12 × 7) К — (6×7) К + о. с. диаметром 9,3 мм.

В табл. 23 представлены результаты определения крутящего момента в канатах из табл. 22 при чистом растяжении, которые также дают линейную зависимость для отношения

$$\frac{M}{T} = \frac{C}{\lambda}.$$

Результаты определения крутящих моментов при чистом растяжении в канатах (6 × 37) К — о. с. *Таблица 23*

№ по табл.	Вариант свивки прядей	T, $кГ$	M, $кГ\text{-}см$	$M/T = C/\lambda$, см: на опыте	средние данные	по расчету	Расхождение, %
1	1—6+12+18	1350	150	0,111	0,110	0,110	—
		2050	225	0,110			
		2750	300	0,109			
2	1+6—12+18	1230	150	0,122	0,122	0,125	+2,5
		1860	225	0,121			
		2430	300	0,123			
3	1—6—12+18	600	75	0,125	0,124	0,130	+4,8
		1200	150	0,125			
		1830	225	0,123			

Таким образом, эти канаты проверены на опыте по трем параметрам: удлинению, раскручиванию (см. рис. 35) и по величине крутящего момента. Ограничиваясь в первых двух испытаниях малыми деформациями, можно считать, что имеется удовлетворительное согласование расчетов с опытами по всем трем независимым параметрам, что равноценно проверке трех независимых коэффициентов A, B и C, определяющих эти параметры. Однако это положение нельзя считать общим. Канаты с органическим сердечником не обладают стабильными механическими свойствами вследствие нестабильности свойств сердечника. Из всего числа испытанных канатов этого типа хорошее и стабильное согласование с опытом дают только канаты с тугокрученым полным сердечником. Канаты, в которых вследствие слабости сердечника пряди опираются друг на друга и между ними возникают большие давления, сопровождающиеся большим междупрядным трением, при испытании на кручение не дают удовлетворительного согласования с опытом, они оказываются значительно жестче, чем по расчету, и имеют большую площадь петли гистерезиса. На такие некачественно изготовленные канаты в расчетах мы ориентироваться не можем. Поэтому на основании многочисленных опытных данных для однослойных канатов со слабым органическим сердечником можно рекомендовать корректив к коэффициенту влияния C, беря в расчет

$$C_{\text{рас}} = \psi C, \qquad (II.85)$$

где C — теоретическое значение этого коэффициента;

ψ — поправочный коэффициент, зависящий от качества свивки сердечника.

В большинстве случаев удовлетворительное согласование с опытами можно получить при

$$\psi = 0{,}96 \div 0{,}98. \qquad (II.86)$$

Такой незначительный корректив, входя в определитель

$$\Delta = AB - C^2,$$

представляющий для этих канатов малую разность больших величин, дает существенную поправку к расчетам.

Следующая серия опытов относится к канатам с металлическим сердечником и многослойным.

Характеристика испытанных канатов с однопрядным металлическим сердечником, представляющим собой обычную прядь, дана в табл. 24. Канаты 1, 2 и 3, 4 одинаковы и отличаются лишь направлением свивки центральной пряди, что в расчетах отражается в величине коэффициентов C.

Таблица 24

Канаты с однопрядным металлическим сердечником *

№ по поз.	Характеристика каната, угол свивки прядей	Диаметр, *мм*	Конструкция, диаметр проволок, угол или шаг свивки		A, *кГ* / b, *кГ · см²* / C, *кГ · см*
			основной пряди	сердечника	
1	$(6 \times 7)\,K \div (1 \times 7)$ $17° 30'$	5,4	$1 \div 6$ $\delta = 0{,}6$ *мм*; $\alpha = 12° 30'$		237 000 / 495 / 9 617
2	$(6 \times 7)\,K - (1 \times 7)$ $17° 30'$	5,4	То же		237 000 / 495 / 8 740
3	$(5 \times 19)\,0 + (1 \times 7)$ $14° 30'$	5,4	$1 + 6 + 12$ $\delta = 0{,}6$ *мм*	$1 + 6$; $\delta = 0{,}8$ *мм*; $h = 22$ *мм*	548 700 / 4 030 / 43 870
4	$(5 \times 19)\,0 + (1 \times 7)$ $14° 30'$	8,4	$\alpha_1 = 11° 50'$ $\alpha_2 = 12° 50'$	То же	548 700 / 4 030 / 41 790
5	$(6 \times 19)\,0 - (1 \times 19)$ $20°$	17,2	$1 \div 6 + 12$; $\delta_0 = 1{,}1$ *мм*; $\delta_1 = 1{,}0$ *мм*; $\alpha_1 = \alpha_2 = 20°$	$1 + 6 + 12$; $\delta = 1{,}4$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 12° 30'$	1 910 000 / 102 600 / 334 900

В табл. 25 показаны результаты испытаний этих канатов на растяжение свободно подвешенным грузом. Канаты с металлическим сердечником в пределах нагрузок,

* Кроме указанных случаев, центральная и основные проволоки в прядях одинаковы.

Таблица 25

Испытания на растяжение свободно подвешенным грузом канатов с однопрядным металлическим сердечником

№ по пор	T_0, кГ	Угол раскручивания на 1 м длины, *град*		Расхождение, %	Удлинение на 1 м длины, *мм*		Расхождение, %
		из опыта	по расчету		из опыта	по расчету	
1	300	702	660	—6	6,36	5,91	—7
2	300	341	378	+8	3,75	3,66	—2,4
3	300	300	204	—12	—	—	—
4	300	162	156	—4	—	—	—
5	1000	24	23	—5	—	—	—

не вызывающих пластических деформаций проволок, имеют практически линейные законы деформации с очень малой петлей гистерезиса. Поэтому сравнения расчетных и опытных данных даются только для отдельных точек. Согласование расчетов с опытами получается вполне удовлетворительным.

В табл. 26 дана характеристика многослойных канатов, состоящих из двух слоев прядей. В первом канате во внешние промежутки между прядями внутреннего слоя уложены проволоки заполнения (5 × 1). Слои прядей во всех канатах свиты в разные стороны. В табл. 27 представлены результаты испытаний этих канатов на растяжение свободно подвешенным грузом.

Для многослойных канатов расчет дает, как правило, завышенные значения жесткостных характеристик. Это объясняется некоторой расслабленностью прядей в новом канате. Поэтому для каната № 3 были проведены повторные испытания в этих же условиях, но после некоторой его работы на пробежной машине. В результате обтяжки на пробежной машине согласование с опытом заметно улучшалось. Это свидетельствует о большей приемлемости нашей расчетной схемы для обтянутых канатов.

В табл. 28 представлены результаты определения крутящих моментов для каната № 3, возникающих при чистом растяжении.

В табл. 29 даны испытания некоторых канатов из табл. 24 и 26 на свободное кручение с определением отношения укорочения каната к углу закручивания.

Таблица 26

Характеристика многослойных канатов

№ по пор.	Конструкция каната	Диаметр, *мм*	Характеристика слоев прядей и параметры их свивки в канат: внешнего слоя	Характеристика слоев прядей и параметры их свивки в канат: внутреннего слоя	*A*, *кГ* / *B*, *кГ·см²* / *C*, *кГ·см*
1	(36 × 7) К — (5 × 1) — (5 × 19) О + о. с. с прозолоками заполнения (5 × 1)	12	1 + 6; $\delta = 0{,}8$ *мм*; $\alpha = 12°30'$; $r = 5{,}1$ *мм*; $\beta = 23°$	См. (5 × 19) из табл. 21	1 136 000
					25 700
			Прозолоки заполнения (5×1); $\delta = 1{,}0$ *мм*; $r = 3{,}65$ *мм*; $\beta = 19°40'$		58 620
2	(12 × 7) К — (6 × 7) К + о. с.	9,3	1 + 6; $\delta = 0{,}6$ *мм*; $\alpha = 12°30'$		581 600
			$r = 3{,}75$ *мм*, $\beta = 19°30'$	$r = 1{,}95$ *мм*, $\beta = 17°30'$	6110
					36 970
3	(12 × 7) К — (6 × 19) К + о. с.	20,5	1 + 6; $\delta = 1{,}4$ *мм*; $\alpha = 12°20'$; $r = 8{,}15$ *мм*; $\beta = 21°30'$	1 + 6 + 12; $\delta = 0{,}8$ *мм*, $\alpha_1 = 12°$; $\alpha_2 = 13°30'$; $r = 5{,}0$ *мм*; $\beta = 19°50'$	2 085 000
					190 200
					511 000

Таблица 27

Результаты испытаний многослойных канатов (см. табл. 26) на растяжение свободно подвешенным грузом

№ по пор.	Нагрузка, *кГ*	Угол раскручивания на 1 м длины, *град*: из опыта	Угол раскручивания на 1 м длины, *град*: по расчету	Расхождение, %	Удлинение на 1 м длины, *мм*: из опыта	Удлинение на 1 м длины, *мм*: по расчету	Расхождение, %
1	6000	98	86	—12,3	—	—	—
2	2000	215	190	—11,6	—	—	—
3	8000	96	78	—18,6	6,2*	4,9	—21,0
3*	8000	88	75	—11,3	5,6	4,9	—12,5

* Канат № 3 после работы на пробежной машине при десятикратном запасе прочности и $D/d = 20$ до 5 тыс. перегибов.

Таблица 28

Определение крутящих моментов, возникающих в канате № 3 из табл. 26, при чистом растяжении

Измерение крутящего момента	T, кГ	M, кГ·см	$\frac{M}{T}$, см	По расчету	Расхождение, %
Для каната в целом	1000	162	0,162	0,171	+5,5
Для внутреннего слоя прядей . .	100,0	116	0,116	0,118	−1,7

Таблица 29

Испытания канатов на свободное кручение

№ каната / № табл.	Конструкция каната	α/ρ, мм на опыта	α/ρ, мм по расчету	Расхождение, %
1/24	(6 × 7) К + (1 × 7)	4,02	4,05	—
2/24	(6 × 7) К — (1 × 7)	3,73	3,70	—
2/26	(12 × 7)К + (6 × 7) К +; о. с.	0,645	0,635	−1,6

ГЛАВА 3

СИЛОВОЙ РАСЧЕТ И ВОПРОСЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ КАНАТОВ

§ 19

ОБЩАЯ СХЕМА СИЛОВОГО РАСЧЕТА ПРЯМОГО КАНАТА

В конструктивном построении стального каната очень важное значение имеет проблема равнопрочности его элементов, связанная с рациональным использованием металлического сечения каната и его несущей способности. Эта проблема включает в себя целый комплекс весьма сложных вопросов, многие из которых на современном этапе еще далеки от своего разрешения. Равнопрочность каната нельзя рассматривать только в том смысле, какой вкладывается в это понятие в отношении обычных металлоконструкций, работающих на статическую нагрузку. Так как различные проволоки в процессе эксплуатации каната находятся в различных условиях, то их равнонапряженность в отношении, например, осевых усилий еще не определяет равнопрочности такой конструкции в общем смысле. Наружные проволоки в канате первыми воспринимают на себя все внешние воздействия на канат со стороны шкивов и барабанов и поэтому при прочих равных условиях они разрушаются раньше, чем внутренние.

Если под равнопрочностью понимать одновременное исчерпание работоспособности всех элементов каната, то с учетом внешнего воздействия на канат его наружные проволоки следует несколько разгрузить от осевых напряжений по отношению ко внутренним. Чтобы эта разгрузка была оптимальной, надо уметь правильно оценить условия работы внешних проволок в канате, что затрагивает целый комплекс вопросов, связанных с контактной и усталостной прочностью проволок, их истиранием, коррозионным воздействием внешней среды и т. д.

Кроме того, вопросы безопасности работы каната вследствие сложности контроля его разрушения требуют, чтобы проволоки внутренних слоев, не доступные для наблюдения, были напряжены не больше, чем наружные. Все это вместе взятое вопрос равнопрочности каната сводит в общем к трудно разрешимой проблеме.

Несмотря на всю ее многогранность, фундаментальным вопросом в этой проблеме является задача о распределении между отдельными элементами каната действующей на него внешней осевой нагрузки, т. е. задача его статической равнопрочности. Только на этой основе может быть построено ее решение. В пределах точности, обусловленной принятой расчетной схемой, эта задача для прямого каната решается в изложенной выше теории.

В настоящей главе рассматриваются основные факторы, определяющие распределение нагрузки в канатах, и связанные с этим вопросы конструирования. Для этого прежде всего представим общую схему силового расчета каната.

Уравнения статики каната (II. 36)

$$T = A\varepsilon + C\theta,$$
$$M = C\varepsilon + B\theta$$

получаются суммированием по всем отдельным его элементам осевых усилий P_i и крутящих моментов L_i. Если суммирование производить не по всему канату, а только по некоторой группе из k его элементов, то получим нагрузку, приходящуюся на эту группу элементов в канате, например на слой проволок или прядей. Это можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} T_k &= A_k\varepsilon + C_k\theta; \\ M_k &= C_k\varepsilon + B_k\theta, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.1)}$$

где A_k, B_k, C_k — суммарные коэффициенты жесткости для данной группы элементов; деформации ε и θ относятся к канату в целом.

Приняв во внимание общие выражения для деформаций каната (II.38), получим

$$\left.\begin{aligned} T_k &= T\,\frac{A_kB - C_kC}{\Delta} + M\,\frac{AC_k - A_kC}{\Delta}; \\ M_k &= T\,\frac{C_kB - B_kC}{\Delta} + M\,\frac{B_kA - C_kC}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2)}$$

В частных случаях, рассматриваемых в § 13, будем иметь следующую картину распределения нагрузки:

1. Чистое растяжение каната ($\theta = 0$)

$$T_k = \frac{A_k}{A} T; \quad M_k = \frac{C_k}{A} T. \tag{III.3}$$

2. Свободное растяжение ($M = 0$)

$$\left.\begin{aligned} T_k &= \left(A_k - C_k \frac{C}{B}\right) \varepsilon = \left(C_k - A_k \frac{B}{C}\right) \theta; \\ M_k &= \left(C_k - B_k \frac{C}{B}\right) \varepsilon = \left(B_k - C_k \frac{B}{C}\right) \theta. \end{aligned}\right\} \tag{III.4}$$

3. Чистое кручение ($\varepsilon = 0$)

$$M_k = \frac{B_k}{B} M; \quad T_k = \frac{C_k}{B} M. \tag{III.5}$$

4. Свободное кручение ($T = 0$)

$$\left.\begin{aligned} T_k &= \left(C_k - A_k \frac{C}{A}\right) \theta = \left(A_k - C_k \frac{A}{C}\right) \varepsilon; \\ M_k &= \left(B_k - C_k \frac{C}{A}\right) \theta = \left(C_k - B_k \frac{A}{C}\right) \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{III.6}$$

Эти выражения определяют усилие и крутящий момент, приходящиеся на данную группу элементов, в их проекции на ось каната как некоторую часть внешней нагрузки.

Силовые факторы в поперечном сечении наклонного винтового элемента каната определяются иными выражениями. Для проволоки в спиральном канате при расчете по схеме ЛК, пользуясь формулами (II.33) и (II.34), можно записать:

$$P_t = EF\varepsilon_s; \quad L_t = GI_p\tilde{\gamma}; \quad L_b = EI\tilde{b}. \tag{III.7}$$

Отсюда основные нормальные напряжения от осевого растяжения проволоки запишутся так:

$$\sigma_p = \frac{P_t}{F} = E(\varepsilon \cos^2 \alpha + r\theta \sin \alpha \cos \alpha). \tag{III.8}$$

Силовые факторы в поперечном сечении пряди в канате двойной свивки определяются выражениями (II.52) — (II.57). После этого прядь рассчитывается как спиральный канат, испытывающий растяжение, кручение и изгиб (II.52) — (II.55). Теория изгиба канатов изложена в следующей главе, поэтому здесь можно привести пока лишь зависимости для расчета прядей на растяжение и кручение.

Ограничимся расчетом по схеме ЛК. Для этого, чтобы определить деформации отдельных проволок в пряди, можно воспользоваться формулами (II.34), подставив в них вместо ε и θ деформации растяжения $\varepsilon_{гр}$ (II.53) и кручения $\tilde{t}_{пр}$ (II.55) пряди.

В результате получаем следующие расчетные формулы для деформаций проволок:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_s &= \varepsilon_{пр}\cos^2\alpha - r\tilde{t}_{пр}\sin\alpha\cos\alpha; \\ \tilde{t} &= \tilde{t}_{пр}\cos^4\alpha + \varepsilon_{пр}\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{r}; \\ \tilde{b} &= \tilde{t}_{пр}(1 + \cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha - \varepsilon_{пр}\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (III.9)$$

По формулам (III.7) получим усилия и моменты в проволоке. Напряжения растяжения запишутся аналогично (III.8) так:

$$\sigma_p = E(\varepsilon_{пр}\cos^2\alpha + r\tilde{t}_{пр}\sin\alpha\cos\alpha). \quad (III.10)$$

Остальные составляющие напряжений определяются по формулам из § 10. Таким образом, мы имеем общую схему для расчета усилий и напряжений в отдельных элементах прямого каната.

В заключение следует указать на метод проверки всех результатов расчета. После того как будут определены все силовые факторы в элементах каната, по формулам (II.3) для спирального каната или по (II.58) для прядевого каната определяем осевое усилие P_x и крутящий момент L_x. Сумма этих величин по всему канату, как это и заложено в построении теории расчета, должна равняться внешней нагрузке, действующей в рассматриваемом его сечении, т. е.

$$\sum P_{xi} = T; \quad \sum L_{xi} = M.$$

Совпадение этих результатов и даст проверку правильности всех расчетов.

§ 20

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ В КАНАТЕ ПРИ КРУЧЕНИИ

Определение на опыте усилий и напряжений во внутренних слоях проволок в канате представляет собой довольно сложную проблему.

Первая попытка проникновения в напряженное состояние внутренних проволок в спиральном канате с помощью электротензодатчиков сопротивления, судя по литературным данным, принадлежит А. Ф. Бабенко и М. Ю. Аквенсону [2]. Однако при этом пришлось снять часть наружных проволок, что привело к нарушению общей структуры каната.

В целях определения напряженного состояния внутренних проволок в канате большой интерес представляет метод электромагнитной сепарации, впервые примененный для канатов В. С. Дирацу [43]. Этот метод основан на изменении электромагнитной проницаемости материала проволок под влиянием деформации, однако ввиду определенных технических трудностей он также не получил должного развития.

Наиболее перспективным в этом направлении представляется метод прямой электротензометрии [39, 75]. Он заключается в том, что вместо стального каната изготовляется его модель из электротензочувствительных изолированных проволок, например, из константана или нихрома. Концы проволок в закреплениях каната выводятся на электротензоизмерительную аппаратуру и сами служат тензодатчиками. Этот метод высокочувствителен, но пригоден только для общего измерения сопротивления проволоки без учета его изменения по ее длине и поэтому применяется в случае постоянной по длине каната нагрузке. При натяжениях в проволоке, изменяющихся по длине каната, как это следует ожидать при изгибе каната, этот метод не применим. Поскольку при кручении и растяжении образцов каната небольшой длины теорией допускаются постоянные натяжения в проволоке по ее длине, то этот метод представляется весьма обнадеживающим. Идея метода прямой электротензометрии каната появилась недавно и опытных данных пока накоплено мало.

Первый эксперимент по непосредственному определению распределения усилий между слоями проволок в спиральных канатах (прядях) опубликован в работе П. П. Нестерова и других авторов [72]. Этот метод основан на вырезке слоев проволок в нагруженном канате. Предварительно закрученная или раскрученная прядь растягивается до усилия T_0. Затем, сохраняя регулировкой нагрузки удлинение пряди постоянным, вырезают отдельные слои проволок. Нагрузка после вырезки каждого слоя падает. Падение нагрузки равно усилию, воспринимаемому вырезанным слоем проволок при совместной их работе.

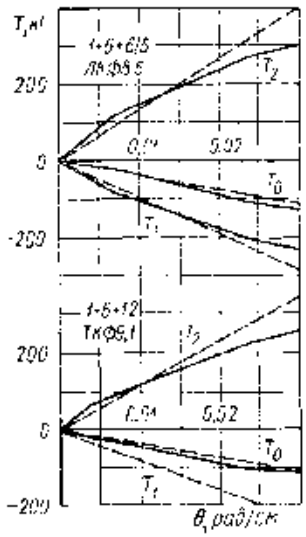


Рис. 37. Графики распределения усилий по слоям проволок в прядях при кручении.

Теоретически эти опыты могут быть описаны с помощью формулы (III.1).

Усилие T_0 действует независимо от кручения θ, поэтому вызванные им деформации определяются, как при чистом растяжении, согласно формуле (II.43). Это дает следующие значения осевых усилий по слоям каната от силы T_0:

$$T'_k = \frac{A_k}{A} T_0.$$

Предварительное кручение пряди является свободным, поэтому вызванное им распределение усилий определяется первой формулой из (III.6):

$$T_k = \left(C_k - A_k \frac{C}{A}\right)\theta.$$

Найденные из опытов значения усилий вызваны обоими факторами: растяжением и кручением. Вычитая из экспериментальных данных значения усилий, вызванных растяжением, найдем их опытные значения от кручения:

$$T_k = (T_k)_{эксп} - T'_k.$$

Расчетные данные прядей представлены в табл. 30, а на рис. 37 показаны графики распределения усилий

Таблица 30

Расчет усилий по слоям прядей при кручении ($\theta = 0.03$ *рад/см*, $T = 0$)

Слои проволок	Прядь I	6 + 6 + 6 К, $d = 8.6$ *мм*, $\delta_0 = 2.0$; $\delta_1 = 1.8$; $\delta_2 = 2.0$; $\delta_1' = 1.5$; $\alpha_1 = -8°10'$; $\alpha_2 = 15°30'$; $\alpha_2' = 15°10'$			Прядь I	6 + 12 + 1 К, $d = 9.1$ *мм*; $\delta_0 = 1.9$; $\delta = 1.8$; $\alpha_1 = 12°$; $\alpha_2 = 10°20'$		
	A_k, *кг*	C_k, *кг · см²*	T_k	A_k, *кг*	C_k, *кг · см²*	T_k
Центральная	62 800	0	−113	57 000	0	−116
Первый слой	296 000	8050	−202	286 000	11 230	−235
Второй слой	535 000	45 550	+405	562 000	49 200	351
Прядь в целом	893 800	53 600	0	905 000	60 430	0

по слоям проволок в функции от кручения прядей. Сплошные линии на этих графиках соответствуют экспериментальным данным, штриховые — расчетным. Как видим, соответствие теории с опытом получается достаточно хорошим.

Описанный метод дает возможность определить суммарное усилие в слое проволок. Однако он применим не во всех случаях. Выше, при объяснении расчетов в табл.7, было показано, что при закручивании спирального каната внутренний слой проволок испытывает осевое сжатие и не теряет устойчивости только потому, что находится под действием радиального сжатия со стороны наружного слоя проволок. Вырезав в нагруженном таким образом канате наружные проволоки, мы изменим условия нагружения внутренних проволок. Во избежание этого явления канат должен иметь предварительное натяжение, обеспечивающее положительное усилие во всех слоях проволок, что в опытах П. П. Нестерова выполняется.

Второй опыт, также позаимствованный из работы П. П. Нестерова [70], в своей постановке хотя и не имеет прямого отношения к рассматриваемому вопросу, но его обработка дает весьма ценные сведения о распределении усилий в многослойных канатах.

На опытах П. П. Нестеровым было установлено, что если двухслойный канат перед растяжением раскрутить на некоторый угол, то его диаграмма растяжения $T - \varepsilon$ (рис. 38) на некотором участке претерпевает резкий изгиб и может быть апроксимирована ломаной линией.

Излом диаграммы растяжения раскрученного каната можно объяснить следующим образом. При раскручивании двухслойного каната наружный слой прядей отслаивается и практически исключается из работы. Оставшаяся его жесткость, определяемая как для суммы многожильных пружин по формулам (II. 82), не имеет практического значения. Поэтому можно считать, что отслоившиеся наружные пряди не воспринимают осевой нагрузки и выключаются из работы. В этот период продольная жесткость каната определяется только внутренним слоем

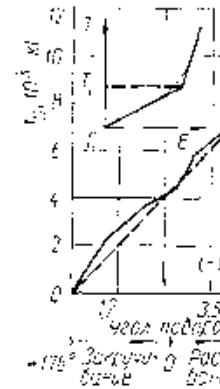


Рис. 38. Графики определения точки излома диаграммы растяжения предварительно раскрученного двухслойного каната.

$$\varepsilon_1 = \frac{T}{A_1}.$$

По мере увеличения натяжения каната расслабление наружных прядей выбирается и при некотором значении $T = T_0$ они включаются в работу, что сопровождается изломом диаграммы растяжения. При этом резкого излома диаграммы растяжения на опыте не происходит в связи с тем, что пряди включаются в работу не одновременно.

Усилие в наружном слое прядей определяется согласно (III. 1):

$$T_2 = A_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) + C_2\vartheta_0,$$

где ε_0 и ϑ_0 — деформации каната от его начального раскручивания.

Считая раскручивание свободным, согласно (II. 46) можно записать:

$$\varepsilon_0 = -\frac{C}{A}\vartheta_0.$$

Усилие T_2 имеет смысл только в положительной области, а поэтому переходной точкой при $T = T_0$ будет

$$T_2 = A_2\left(\frac{T_0}{A_1} - \frac{C}{A}\cdot\theta_0\right) + C_2\theta_0 = 0$$

Отсюда находим точку излома диаграммы растяжения каната

$$T_0 = A_1\left(\frac{C}{A} - \frac{C_2}{A_2}\right)\theta_0, \qquad \text{(III. 11)}$$

где коэффициенты C и A относятся к канату в целом, а A_2 и C_2 — к его наружному слою. Расчет этих коэффициентов ведется для нормального состояния каната, ибо наружный слой можно считать уже включившимся в работу. Рассмотрим соответствие этого расчета с опытами.

Характеристика каната в опытах проф. П. П. Нестерова [70] дана в табл. 31. На рис. 38 показаны экспериментальные и расчетные значения растягивающей нагрузки T_0 для этого каната, при которой происходит излом диаграммы растяжения, в функции от угла раскручивания. Как видим, полученная формула дает полное совпадение с результатами опытов проф. П. П. Нестерова. На второй шкале по оси абсцисс показан угол поворота каната от его естественного свободного состояния. В свободном состоянии канат раскручен вследствие упругой отдачи и его диаграмма растяжения претерпевает излом при

Таблица 31

Характеристика двухслойного каната с линейным касанием прядей (10 × 19) К + (5 × 7) К + (5 × 19) К + о. с., диаметром 25 *мм**

Слой пряди	Диаметр пряди, *мм*	r, *мм*	β	A, *кГ*	C, *кГ см*
Первый слой (5 × 19) К	5,4	4,7	9°	1 690 200	47 625
Заполнение (5 × 7) К	2,4	6,7	12° 30′	322 100	39 135
Первый слой прядей с заполнением	—	—	—	2 012 300	86 760
Второй слой (10 × 19) К	5,8	10,1	18°	3 422 700	967 300
Канат в целом	—	—	—	5 435 000	1 054 060

* Пряди по типу № 8 — на табл. 14, пряди заполнения — по типу № 1; шаг свивки прядей в канат 195 *мм*; длина образца $l = 1{,}2$ *м*.

нагрузке примерно 4000 *кГ*. Излом диаграммы растяжения исчезает при закручивании каната на $\sim 176^{\circ}$, что должно соответствовать углу упругой отдачи под действием свивочных напряжений.

Анализ этих опытов, кроме проверки общих положений расчета, имеет большое значение для оценки влияния упругой отдачи в многослойном канате на совместность работы его элементов.

Вследствие упругой отдачи наружный слой прядей включается в работу только при растяжении каната усилием 4000 *кГ*, а до этого работает только внутренний слой. Ясно, что это отрицательно сказывается на работоспособности каната. Поэтому при навеске многослойного каната желательно не допустить его раскручивания.

Таким образом, данные опыты, хотя и имеют пока лишь частный характер, подтверждают приемлемость полученных зависимостей для практических расчетов.

§ 21

УРАВНОВЕШЕННЫЕ НЕКРУТЯЩИЕСЯ КАНАТЫ

Одним из важных положений в конструировании стальных канатов является построение так называемых уравновешенных некрутящихся канатов. Основные механические свойства таких канатов были сформулированы в § 13, а принцип их построения заключен в равенстве (11, 50):

$$C = 0.$$

Прежде чем перейти к конкретным расчетам и принципам конструирования таких канатов, необходимо определить практическое значение их в современной технике. Полная ясность в этом вопросе будет дана в последующих главах при изучении работы канатов в шахтном подъеме, а сейчас мы ограничимся пока лишь общими замечаниями.

Основным видом нагрузки на канат является растяжение. В зависимости от характера крепления поднимаемого груза растяжение может быть чистым, когда концы каната закреплены от вращения, и свободным, когда кручение одного из концов каната ничем не ограничено. В первом случае поднимаемый груз соединен с канатом

жестко и перемещается в продольных направляющих, как, например, в лифтах и на шахтных подъемах, или передается на канат посредством полиспастной системы, ограничивающей его скручивание. На преобладающем большинстве подъемных устройств, если не считать побочных факторов, канат работает без раскручивания на чистое растяжение.

В отдельных специальных случаях по ряду технических причин нагрузка на канат передается в виде свободно подвешенного груза. Канат при этом растягивается с раскручиванием, что описывается выражениями (II. 41):

$$\varepsilon = \frac{BT}{AB - C^2}; \quad \theta = -\frac{CT}{AB - C^2}.$$

К таким устройствам относится шахтный проходческий подъем, когда в связи с проходческими работами часть ствола еще не закреплена и на этом участке груз поднимается одним концом каната без направляющих. На многих кранах общего назначения, корабельных и портальных кранах небольшой грузоподъемности также встречается подъем груза одной ветвью каната без ограничения раскручивания. В аналогичных условиях в отношении кручения работают аэростатные тросы, а также каротажные бронированные кабели [32], или кабель-канаты.

Каротажный кабель-канат предназначен для геофизической разведки глубоких буровых скважин до 5000—7000 *м*, несет не только механическую нагрузку, но и содержит токоведущие жилы. В механическом отношении такой бронированный кабель эквивалентен канату. Наибольшее распространение получили двухбронные каротажные кабели, представляющие собой двухслойный спиральный канат с изолированными токоведущими жилами в центральной части. Каротажный кабель со свободно подвешенной аппаратурой на конце опускается в буровую скважину. Вес концевого груза здесь небольшой и основная механическая нагрузка на кабель возникает за счет его собственного веса.

Кроме обычных случаев, в некоторых подъемных системах возникают условия для отрицательного проявления фактора неуравновешенности каната и при закрепленных от вращения его концах. Сюда прежде всего относится глубокий шахтный подъем, где подъемный канат,

несмотря на закрепление его концов от вращения, скручивается под действием собственного веса, а также некоторые другие системы.

Отрицательное действие кручения проявляется в двух формах. С одной стороны, кручение концевого груза вызывает технологические неудобства при работе подъема, а в случае подъема людей (шахтный проходческий подъем) — отрицательное физиологическое воздействие. Так, например, в шахтном проходческом подъеме при обычном подъемном канате типа $6 \times 37 + o.$ с. бадья при свободном опускании в ствол вращается с большой угловой скоростью и совершает несколько десятков оборотов [71].

С другой стороны, кручение оказывает неблагоприятное воздействие на канат, вызывая снижение его срока службы. Это связано прежде всего с резким перераспределением нагрузки между элементами каната, что хорошо видно на примере спирального каната из формулы (III. 8).

Если кручение каната отсутствует, то распределение напряжений по его сечению определяется только первым членом в этой формуле

$$\sigma_p' = E\varepsilon \cos^2 \alpha.$$

Здесь переменным по сечению каната может быть только угол свивки. Однако в область малых углов (до 15—20°), косинус угла изменяется очень медленно. Поэтому даже существенная разница в углах свивки отдельных слоев проволок не сопровождается заметным перераспределением напряжений, с которым можно было бы считаться на практике.

Так, например, при углах свивки, отличающихся вдвое ($\alpha_1 = 10°$ и $\alpha_2 = 20°$), различие в напряжениях составляет примерно 10%.

Составляющая нормальных напряжений от кручения каната

$$\sigma_p'' = r\theta \sin \alpha \cos \alpha$$

зависит прежде всего от синуса угла свивки, который быстро изменяется в области малых углов и ставит напряжения в зависимость от радиусов слоев. Поэтому при постоянных углах свивки эти напряжения растут по линейному закону по мере удаления слоя проволок от центра каната.

В уравновешенном канате при его свободном растяжении кручение со всеми вытекающими отсюда последствиями отсутствует.

Рассмотрим основной принцип построения уравновешенного спирального каната. Коэффициент

$$C = \sum c_i.$$

В слагаемых c_i оставим только первый член (II. 29), зависящий от продольной жесткости проволоки. Проволоки, расположенные в одном слое, являются равноправными в геометрическом и силовом отношениях, поэтому их можно объединить в группы, полагая

$$c_i = m_i E_i F_i r_i \sin\alpha_i \cos^2\alpha_i, \qquad \text{(III. 12)}$$

где m_i — число проволок в данном слое.

Знак каждого слагаемого c_i зависит от направления или знака угла свивки.

Изменяя направления свивки отдельных слоев проволок, под знаком суммы можно иметь слагаемые с различными знаками. Выбран между ними определенные количественные соотношения, в результате можно придти к нулю:

$$\sum c_i = 0. \qquad \text{(III. 13)}$$

Каждое слагаемое c_i по своему механическому смыслу есть или i-й крутящий момент, возникающий в данном слое проволок при единичном относительном удлинении каната, или i-е осевое усилие, возникающее при единичном кручении каната. В уравновешенном канате эти силы или моменты взаимно компенсируются.

Для проверки практического применения этого уравнения был специально изготовлен четырехслойный спиральный канат 1 — 6 — 12 — 17 + 24 со следующими расчетными данными: диаметр каната 5,4 *мм*; диаметр проволок 0,6 *мм*; углы свивки по слоям проволок, начиная с центра, $\alpha_1 = -11^\circ 10'$; $\alpha_2 = -12^\circ 10'$; $\alpha_3 = -20^\circ 40'$; $\alpha_4 = +25^\circ 40'$.

Этот канат очень близок к полному уравновешиванию. Так, при числе проволок в наружном слое $m = 24$ коэффициент C положителен и равен $+820$ *кГ см*, в промежутке между $m = 21$ и $m = 22$ он меняет свой знак от

—250 до + 110 *кГ см*. Таким образом, при $m > 21$ в силу положительности C преобладающий крутящий момент будет в наружном слое проволок, при $m < 22$ — во внутренних слоях, свитых в обратную сторону.

На рис. 39 показаны результаты повторных испытаний этого каната на раскручивание под действием свободно подвешенного груза при различном числе проволок в наружном слое. Здесь же показан график расчетного коэффициента C. Как видно из рисунка, расчетный коэффициент C и экспериментальные графики углов раскручивания пересекают ось абсцисс в промежутке между числом проволок в наружном слое 21—22. Если оценивать расчет по необходимому числу проволок в наружном слое, которое могло бы обеспечить полную уравновешенность каната, то максимальная ошибка не превышает 2,5%. Таким образом, в отношении уравновешенности спиральных канатов расчет получается достаточно точным.

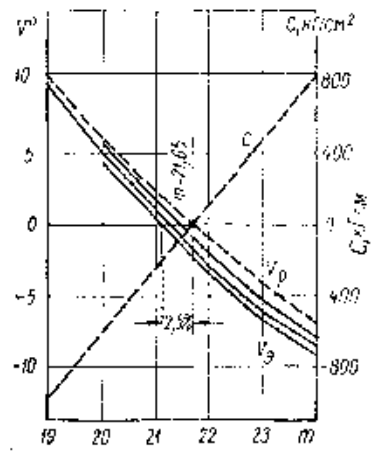


Рис. 39. Испытания спирального каната на уравновешенность:

0 + 6 + 12 + 17 — *м*; диаметр 6,4 *мм*; $l = 50$ *см*; $T = 1000$ *кГ*.

Отклонение от нуля по углам поворота этих образцов каната в данной области значений C также получается ничтожно малым, если учесть, что при свивке всех слоев проволок в одну сторону угол вращения каната составляет примерно полтора оборота.

Все практические расчеты в технике имеют определенные допуски на отклонение от оптимального варианта, и изготовить на практике абсолютно уравновешенный канат также вряд ли удастся. Поэтому целесообразно ввести некоторый критерий для оценки относительной степени уравновешенности каната и выбрать его допускаемые пределы. В качестве такого критерия удобно взять отношение оставшейся неуравновешенной части коэффициента C к его максимально возможному значению

в пределах данной конструкции каната:

$$\psi = \frac{C}{C_m} \leqslant 1. \qquad \text{(III. 14)}$$

Эту величину будем называть относительной неуравновешенностью каната, выражая ее дробным числом или в процентах:

$$\psi = \frac{C}{C_m} 100\%.$$

Для выбора допускаемых отклонений неуравновешенности рассмотрим основные упругие параметры спирального каната и характер распределения напряжений в нем в функции от величины ψ.

На рис. 40 показаны также графики для спирального каната № 7 из табл. 14. На рисунке σ_0 — напряжения растяжения в центральной проволоке; σ_m — максимальные напряжения растяжения в наиболее нагруженном слое; θ — кручение каната. Все графики имеют очень медленный рост, примерно до $\psi = 0{,}6$, затем идут круто вверх.

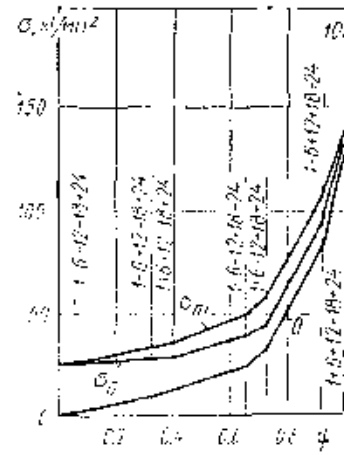


Рис. 40. Изменение максимальных напряжений в пряди 1 × 61 при свободном растяжении в зависимости от степени неуравновешенности

($T = 1000$ кг, $\delta = 1{,}9$ мм; $\alpha = 10°$).

На участке до $\psi = 0{,}4$ наибольшие осевые напряжения в проволоках мало отличаются от их значений для уравновешенного каната при $\psi = 0$. Из этих соображений степень неуравновешенности до 0,4, или до 40%, для спиральных канатов можно считать вполне допустимой. Аналогичную картину распределения напряжений и кручения в функции от ψ получаем и для других типов спиральных канатов.

Если ограничиться этими пределами отклонений для величины ψ, то расчет уравновешенных спиральных ка-

натов значительно упрощается. Так, например, трехслойная прядь, состоящая из одинаковых проволок, в которой первые два слоя свиты в одну сторону, а верхний — в противоположную, уже попадает в область $\psi < 0{,}4$. Для такой же двухслойной пряди $\psi \approx 0{,}7$, и уравновешенность получается недостаточной.

Точный метод расчета на уравновешенность можно построить следующим образом. Пусть задана внутренняя часть каната с внешним диаметром d_1 и коэффициентом C_1. Найдем необходимый внешний слой проволок из условий уравновешенности и геометрической плотности свивки. Первое условие запишется, очевидно, так:

$$C_2 = C_1.$$

Беря для круглых проволок

$$F = \frac{\pi \delta^2}{4},$$

получим следующее уравнение:

$$rm\delta^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha = \frac{4C_1}{E\pi}, \qquad \text{(III. 15)}$$

где геометрические параметры левой части относятся к искомому наружному слою проволок.

Условия собственного тангенциального контакта внешнего слоя проволок рассмотрены в § 4. Из уравнений (I. 29) и (I. 30) следует:

$$r = \frac{d_1}{2(1-\xi)}; \quad \delta = \frac{\xi d_1}{1-\xi},$$

где

$$\xi = \sin \Delta \sqrt{1 + \overline{\cos^2 \Delta \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{ctg} 2\Delta = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \cos \frac{2\pi}{m}}{\sin \frac{2\pi}{m}}.$$

Подставив значения r и δ в уравнение (III. 15), получим

$$\frac{m\xi^2}{(1-\xi)^3} \cos^2 \alpha \sin \alpha = \frac{8C_1}{E\pi d_1^3}. \qquad \text{(III.16)}$$

Так как ξ выражается посредством Δ через m и α, то это трансцендентное уравнение связывает два независимых параметра, выбор одного из которых остается произвольным.

Задаваясь целым числом проволок из технических соображений, решение этого уравнения относительно угла свивки можно получить путем последовательных приближений.

Для закрытых канатов можно ввести следующий упрощенный расчет. Допустим, что канат изготовляется примерно с одинаковыми углами свивки и что все его поперечное сечение сплошь заполнено металлом с неко-

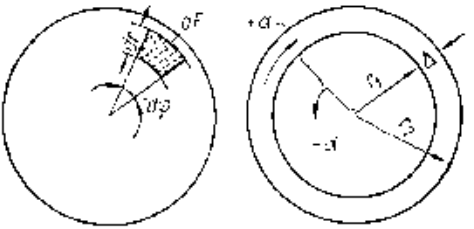


Рис. 41
К расчету уравновешенных закрытых канатов.

торым коэффициентом заполнения γ. Тогда коэффициент C можно представить таким интегралом по поперечному сечению каната:

$$C = \int_F \gamma E \sin\alpha \cos^2\alpha r dF = \gamma E \sin\alpha \cos^2\alpha \int_F r dF. \quad (III.17)$$

Пусть центральная часть каната F_1 от 0 до r_1 свита в одном направлении, а верхние слои F_2 от r_1 до r_2 — в противоположном (рис. 41). Интегралы по этим частям поперечного сечения каната будут иметь разные знаки. Тогда, отбросив общий множитель перед знаком интеграла, условие уравновешенности каната можно записать так:

$$\int_{F_1} r dF - \int_{F_2} r dF = 0.$$

Выразив элемент площади в полярных координатах как

$$dF = r dr d\varphi,$$

получим

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r_1} r^2\,dr - \int_{r_1}^{r_2} r^2\,dr\right)d\varphi = 0$$

или

$$\int_0^{r_1} r^2\,dr = \int_{r_1}^{r_2} r^2\,dr.$$

Обозначим толщину верхних противоположно свитых слоев каната через $\Delta = r_2 - r_1$. Тогда после интегрирования получим

$$\Delta = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}\,d = 0{,}103d, \qquad \text{(III. 18)}$$

где d — внешний диаметр каната.

Эта формула дает удовлетворительные результаты и при расчете круглопроволочных спиральных канатов.

Расчет уравновешенных канатов двойной свивки с органическим сердечником значительно усложняется, так как число варьируемых параметров здесь намного больше. Однако удовлетворительную уравновешенность такого каната можно получить упрощенным способом, уподобив его спиральному канату. Основная ошибка при этом будет состоять в неучете направления свивки проволок в прядях.

Если принять в расчет обтянутый канат, положив его коэффициент сужения равным единице, то можно воспользоваться формулой (II. 77):

$$C = ma_0r_0\cos 2\beta\sin\beta \pm mc_0(\cos 2\beta + 4\sin^4\beta - \sin^2\beta)\cos\beta.$$

Отбросив далее высокие степени $\sin\beta$, можно ограничиться таким выражением:

$$C = m(a_0r_0\sin\beta \pm c_0\cos\beta)\cos 2\beta. \qquad \text{(III.19)}$$

В отличие от спиральных канатов, здесь мы имеем дополнительный член, связанный с коэффициентом c_0 для прядей, который для односторонней свивки входит положительным, а для крестовой — отрицательным. Поскольку же преобладающим остается первый член, то расчет по схеме спирального каната получается удовлетворительным.

Однако высокоуравновешенные канаты двойной свивки широкого распространения в технике не получили. Это

объясняется некоторыми технологическими затруднениями. Как было показано на примере прядей, высокую уравновешенность каната можно получить в пределах трех слоев прядей. Трехслойный канат можно получить примерно из одинаковых прядей, но изготовление такой конструкции каната сопряжено с большим числом технологических операций: свивкой большого числа тонких прядей и тремя операциями по свивке их в канат.

В двухслойном канате для получения высокой уравновешенности требуется большое число относительно тонких круглых прядей в наружном слое, что сопряжено с теми же технологическими трудностями.

Кроме того, многослойные канаты обладают таким органическим недостатком, как расслоение вследствие нарушения совместности работы слоев прядей. Это явление, кроме частных воззрений, еще полностью не изучено, и надежность работы многослойного каната не всегда обеспечивается. Поэтому многослойные канаты в технике применяются как исключение.

В принципе, как это видно из формулы (III.19), возможно построение однослойного уравновешенного каната крестовой свивки. Для этого необходимо обеспечить условие

$$a_0 r_0 \sin\beta - c_0 \cos\beta = 0$$

или

$$\frac{c_0}{a_0} = r_0 \operatorname{tg}\beta. \qquad \text{(III.20)}$$

При этом крутящий момент, возникающий от свивки проволок в прядь, уравновешивается моментом от свивки прядей в канат в пределах одного их слоя.

Для оценки этого соотношения представим прядь из одинаковых проволок, свитых с одинаковыми углами, коэффициенты жесткости которой могут быть выражены так:

$$c_0 = EF\cos^2\alpha\sin\alpha\sum m_i r_i; \qquad a_0 = EF\cos^3\alpha\sum m_i.$$

Тогда после подстановки этих значений в уравнение (III. 20) получим

$$\operatorname{tg}\alpha\,\frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = r_0 \operatorname{tg}\beta. \qquad \text{(III. 21)}$$

Рассмотрим для примера канат $6 \times 37 + \text{о. с.}$ Радиус здесь равен примерно диаметру пряди: $r_0 \approx 7\delta$. Кроме того, для пряди

$$\sum m_i = 37; \quad \sum m_i r_i = 6\delta + 12 \cdot 2\delta + 18 \cdot 3\delta = 84\delta.$$

В результате уравнение (III.21) приобретает такой вид:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{259}{84}\operatorname{tg}\beta \approx 3\operatorname{tg}\beta. \qquad (III.22)$$

Выполнение этого условия требует чрезмерно крутых углов свивки проволок в прядях и очень пологих углов для свивки прядей в канат, отличающихся примерно в три раза. Такая конструкция каната получается очень нетехнологичной и значительно уступает обычным канатам по работоспособности и прочностным характеристикам. Лучшие соотношения углов свивки получаются при меньшем числе прядей до 3—4, но это также сопровождается снижением других качеств каната. Однако в отдельных специальных случаях, например в кабель-канатах [32], такое конструктивное исполнение уравновешенного каната может представить практический интерес.

§ 22

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ДВУХСЛОЙНЫХ КАНАТОВ

На практике чаще всего встречаются некрутящиеся двухслойные канаты, которые применяются обычно в шахтном проходческом подъеме и работают на растяжение свободно подвешенным грузом. При определенных упрощениях расчет такого каната можно выполнить по так называемой безмоментной теории.

Для этого уподобим двухслойный прядевой канат спиральному канату с органическим сердечником и будем считать, что проволоки работают только на растяжение. Существо безмоментной теории состоит в том, что мы не учитываем изгибающих и крутящих моментов в проволоках и прядях. Это упрощение аналогично безмоментной теории тонких оболочек.

Тогда для коэффициентов жесткости слоя прядей получим такие выражения:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= ES_i\cos^3\beta_i;\\ b_i &= ES_ir_i^2\sin^2\beta_i\cos\beta_i;\\ c_i &= ES_ir_i\cos^2\beta_i\sin\beta_i, \end{aligned}\right\} \qquad (III.23)$$

где $S_i = m_iF_i$ — суммарная площадь поперечного сечения слоя прядей; $i = 1,2$;

E — модули упругости, которые предполагаются одинаковыми.

Для двухслойного каната

$$A = a_1 + a_2; \quad B = b_1 + b_2; \quad C = C_1 + C_2; \quad S = S_1 + S_2.$$

Для определения усилий, возникающих в слоях прядей, в общие формулы (III. 1) — (III. 6) следует подставить эти значения коэффициентов и выполнить необходимые преобразования. Ограничимся изучением только чистого и свободного растяжения каната.

При чистом растяжении это приводит к следующим выражениям:

$$T_1 = \frac{S_1 \cos^3 \beta_1}{S_1 \cos^3 \beta_1 + S_2 \cos^3 \beta_2} T; \quad T_2 = \frac{S_2 \cos^3 \beta_2}{S_1 \cos^3 \beta_1 + S_2 \cos^3 \beta_2} T. \tag{III. 24}$$

При $\beta_1 \approx \beta_2$ находим

$$T_1 = \frac{S_1}{S} T; \quad T_2 = \frac{S_2}{S} T. \tag{III. 25}$$

При изменении углов свивки в пределах 10 — 20°, как это имеет место на практике, формулы (III. 24) и (III. 25) дают почти одинаковые результаты. Так, например, при $S_2 = 2S_1$ по формулам (III. 25)

$$T_1 = \frac{1}{3} T; \quad T_2 = \frac{2}{3} T.$$

В то же время при $\beta_1 = 10°$ и $\beta_2 = 20°$ по формулам (III. 24) получим

$$T_1 = 0{,}36\, T; \quad T_2 = 0{,}64\, T,$$

что почти совпадает с предыдущим расчетом. Таким образом, с точностью до 10% можно пользоваться формулами (III. 25). Это объясняется малой скоростью изменения $\cos\beta$ в области малых значений углов свивки.

При растяжении каната свободно подвешенным грузом, когда $M = 0$, согласно (III. 4) получим

$$T_1 = \frac{\mu}{\mu - 1} T; \quad T_2 = \frac{1}{1 - \mu} T, \tag{III. 26}$$

где

$$\mu = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1}, \tag{III. 27}$$

или в выражениях через шаг свивки

$$\mu = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{h_1}{h_2}.$$

Отличительной особенностью этих формул является то, что в них совершенно не входят площади поперечных сечений слоев прядей и закон распределения усилий определяется только геометрией каната. Это объясняется тем, что при принятых упрощениях задача определения распределения усилий в двухслойном канате становится статически определимой, и поэтому величины E и S в расчет не входят.

Покажем это на другом выводе выражений (III.26). Обратимся к уравнениям (II.3) и сохраним в их правых частях только растягивающее усилие P_i, как это принято по безмоментной теории. В результате получим

$$P_x = P_i \cos\beta; \quad L_x = rP_x \sin\beta.$$

Для всего слоя прядей можно записать:

$$T_i = m_i P_{xi}; \quad M_i = m_i L_{xi}.$$

Исключив отсюда mP_i, получим

$$M_i = r_i T_i \operatorname{tg} \beta_i. \qquad \text{(III.28)}$$

При растяжении каната свободно подвешенным грузом крутящий момент, приложенный к канату, равен нулю; поэтому можно записать такую систему двух уравнений равновесия:

$$T_1 + T_2 = T; \quad M_1 + M_2 = 0.$$

Принимая во внимание (III.28), будем иметь:

$$T_1 + T_2 = T; \quad T_1 + \mu T_2 = 0.$$

Решив систему уравнений, приходим к формулам (III.26). Таким образом, задача решается чисто статически.

Второй отличительной особенностью формул (III.26) от (III.24) и (III.25) является то, что первые зависят, а вторые не зависят от знаков углов свивки. Следовательно, при растяжении свободно подвешенным грузом распределение усилий между слоями прядей существенно зависит от относительного направления их свивки.

При свивке слоев прядей в разные стороны величина μ будет отрицательной. Принимая во внимание абсолютное значение μ, формулы (III.26) можно переписать так:

$$T_1 = \frac{\mu}{1+\mu} T; \quad T_2 = \frac{1}{1+\mu} T. \qquad \text{(III.29)}$$

Здесь оба усилия положительны. При положительном μ, т. е. при свивке слоев прядей в одну сторону, одно из усилий будет отрицательным, причем, если $\mu > 1$, то $T_2 < 0$; если $\mu < 1$, то $T_2 > 0$. Обычно в силу геометрических соотношений имеет место первый случай. Случай $\mu = 1$ не имеет смысла, и расчет следует вести по точным формулам.

Наличие отрицательных усилий в наружном слое прядей также не имеет смысла, канат при этом просто расслаивается, что легко воспроизвести на опыте. Реальный смысл имеют только формулы (III. 29) для канатов, слои прядей в которых свиты в разные стороны.

Так как в рассматриваемом случае при принятых упрощениях для двухслойного каната задача оказывается статически определимой, то оценку статической прочности каната можно вести по максимальным напряжениям.

Рассмотрим канаты, слои прядей в которых свиты в разные стороны. Продолжая упрощения дальше, согласно (III. 29) введем в расчет средние напряжения по формулам

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{S_1} = \frac{1+\lambda}{\lambda} k_1 \sigma_0; \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{S_2} = (1+\lambda) k_2 \sigma_0, \quad \text{(III. 30)}$$

где

$$\lambda = \frac{S_1}{S_2}; \quad \sigma_0 = \frac{T}{S};$$

$$k_1 = \frac{\mu}{1+\mu}; \quad k_2 = \frac{1}{1+\mu}.$$

Очевидно, что при $\mu > 1$ $k_1 > k_2$; $T_1 > T_2$.

В преобладающем большинстве конструкций двухслойных канатов площадь поперечного сечения внутреннего слоя прядей меньше, чем внешнего, поэтому $\lambda < 1$ и, следовательно, $\sigma_1 > \sigma_2$. Поэтому расчет на прочность следует вести по напряжениям во внутреннем слое прядей.

Найдем усилие $T_{пр}$ на канат в целом, при котором происходит разрушение внутреннего слоя прядей. Разрушение внутреннего слоя прядей произойдет в тот момент, когда напряжения σ_1 будут равны пределу прочности проволок при растяжении σ_b.

Введем следующие обозначения для суммарного разрывного сопротивления проволок:

$$P_1 = S_1 \sigma_b'; \quad P_2 = S_2 \sigma_b''; \quad P_c = P_1 + P_2.$$

Тогда условие разрушения внутреннего слоя прядей

$$\sigma_1 = \sigma_-$$

может быть приведено к такой окончательной формуле:

$$T_{пр} = \frac{S_1}{S} \cdot \frac{1 + \mu}{\mu} P_c. \qquad \text{(III. 31)}$$

Так, например, в наиболее распространенном случае, когда $S_2 = 2S_1$; $r_2 = 2r_1$ и $\beta_1 \approx \beta_2$, получим

$$T_{пр} = \frac{1}{2} P_c.$$

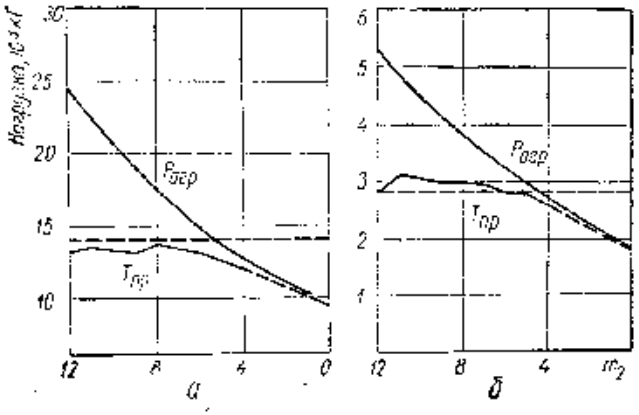


Рис. 42. Графики результатов испытаний двухслойных канатов на разрыв.

а — (12 × 7) — (6 × 19) — о. с.; диаметр 20,5 мм. *б* — (12 × ×7) — (6 × 7) + о. с.; диаметр 9,3 мм

Эти формулы хорошо согласуются с многочисленными экспериментальными данными. Как указывалось в § 18, предложенная нами схема испытаний путем соединения двух одинаковых и противоположно свитых образцов канатов позволяет осуществить растяжение канатов свободно подвешенным грузом на разрывной машине вплоть до разрыва.

Результаты расчетов и испытаний двухслойных канатов до момента разрыва внутреннего слоя прядей представлены в табл. 32. Согласование теории с опытом получается вполне удовлетворительным.

Таблица 32

Результаты испытаний на разрыв внутреннего слоя в двухслойных канатах под действием свободно подвешенного груза

№ по пор.	Конструкция каната	P_c, кГ	σ_b, кГ/мм²	S_1/S_2, мм²	μ	k_1	k_2	$T_{1,0}$, кГ из опыта	$T_{1,0}$, кГ по расчету	%	Примечание
1	(12×7) К—(6×7) К+о.с.	5 700	160	$\frac{11,9}{23,8}$	2,30	0,70	0,30	3 000	2 720	—9,3	См. № 2 в табл. 26
2	(6×19)0—(6×7) К+о.с	18 000	160	$\frac{11,9}{100}$	2,66	0,73	0,27	2 850	2 620	—8,1	—
3	(12×7)К—(6×19) К+о.с.	29 800	160	$\frac{57}{129}$	2,10	0,68	0,32	13 500	13 300	—1,5	См. № 3 в табл. 26
4	(8×10)0—(6×19) 0+о.с.	32 400	160	$\frac{100}{102}$	1,80	0,64	0,36	25 400	25 000	—1,6	Пряди наружного слоя плоские
5	(17×5) К—(5×19) 0+о.с	24 000	160	$\frac{75}{75}$	2,46	0,71	0,29	19 000	17 000	—10,5	—
6*	(16×7)К+(5×19) 0+о.с.	10 000	160	$\frac{30,7}{31,6}$	3,0	0,75	0,25	7 500	6 600	—12	См. № 1 в табл. 26

* Проволоки заполнения отнесены к внутреннему слою прядей.

На рис. 42 показаны графики изменения $T_{пр}$ для канатов № 1 и № 3 (табл. 32) в зависимости от числа прядей m_2 в наружном слое. При изменении m_2 от 12 до 4 величина $T_{ср}$ остается, как видим, практически постоянной и не зависит от площади поперечного сечения наружного слоя прядей, что является достаточно убедительным подтверждением независимости распределения усилий от площадей поперечных сечений слоев прядей. При $m_2 < 4$ величина $T_{ср}$ начинает заметно снижаться. Это объясняется тем, что в этой области опасными являются напряжения уже не в первом, а во втором наружном слое прядей. Штриховыми горизонтальными линиями показаны расчетные значения $T_{ср}$ для этих канатов. Графики $P_{разр}$ показывают разрывное сопротивление канатов при чистом растяжении.

Эти расчеты и опыты приводят нас к важным заключениям. При растяжении свободно подвешенным грузом в двухслойном канате вследствие поворота груза происходит перераспределение нагрузки между слоями прядей таким образом, что основную нагрузку воспринимает внутренний слой, имеющий меньшую площадь сечения, чем наружный. В результате этого разрывная прочность каната снижается примерно вдвое. Наглядным примером может служить канат с двумя слоями одинаковых по диаметру прядей, свитых в разные стороны примерно с одинаковыми углами свивки. Для такого каната

$$\frac{S_1}{S_2} = 2; \quad \frac{r_2}{r_1} = 2; \quad \mu = -2.$$

По формулам (III. 29) усилие во внутреннем слое, имеющем треть сечения каната, $T_1 = \frac{2}{3} T$; усилие в наружном слое каната, имеющем две трети сечения каната,

$$T_2 = \frac{1}{3} T.$$

Нагрузка, как видим, распределяется обратно пропорционально площади поперечных сечений слоев прядей в канате.

Более наглядно это можно объяснить следующим образом. Наружный слой имеет в два раза больше прядей, расположенных на в два раза большем радиусе в канате. Поэтому при растяжении в наружном слое возникает в четыре раза больший крутящий момент, чем во внутрен-

нем. Однако в статическом состоянии крутящие моменты по слоям прядей должны быть одинаковыми и противоположно направленными. Для выполнения этого физического условия нагрузка перераспределяется так, чтобы соответственно уменьшить момент в наружном и увеличить во внутреннем слое прядей. Это и приводит к такому парадоксальному перераспределению нагрузки в канате.

Надо иметь в виду, что такие канаты работают в настоящее время в условиях нагружения на шахтных проходческих подъемах. Хотя высокие запасы прочности и не приводят к порывам перегруженного внутреннего слоя прядей, но разрушение таких канатов начинается именно изнутри.

Следующим важным опытом, подтверждающим наши расчеты, является диаграмма раскручивания каната под действием свободно подвешенного груза.

На рис. 36 представлена экспериментальная диаграмма раскручивания для каната № 1 из табл. 32. Пределом пропорциональности между T и v здесь можно считать величину нагрузки $T_S = 2000$ *кГ*, после которой угол раскручивания каната сильно возрастает также почти по прямой линии. Этот излом диаграммы объясняется достижением напряжений во внутреннем слое предела текучести следующим образом. Усредненные напряжения по слоям прядей согласно (III, 30) $\sigma_1 = 0{,}060\ T$ *кГ/мм*²; $\sigma_2 = 0{,}014\ T$ *кГ/мм*².

Предел текучести для стали повышенного качества, к которой можно отнести и канатную проволоку, $\sigma_S \approx \approx 0{,}8\ \sigma_b$. Из равенства $\sigma_1 = \sigma_3$ можно найти нагрузку на канат в целом T_S, при которой напряжения σ_1 достигают величины σ_S, и происходит излом диаграммы раскручивания.

Имеем: $\sigma_1 = 0{,}060$, $T_S = 0{,}8\ \sigma_b$, откуда

$$T_S = 0{,}8\,\frac{160}{0{,}06} = 2130\ кГ,$$

что почти совпадает с точкой излома диаграммы раскручивания.

Если предположить обратное и считать, что напряжения между слоями прядей распределены равномерно и их приближенное значение

$$\sigma = \frac{T}{S},$$

то для величины T_S аналогичным образом получим значение $T_S = 4500\ кГ$, что явно противоречит опыту.

Если воспользоваться спрямленной диаграммой растяжения проволоки и считать, что после достижения напряжениями предела текучести внутренний слой пряди не принимает дальнейшего приращения нагрузки, то при $T > T_S$ работает только наружный слой прядей. Если, исходя из этого, определить угол раскручивания каната, то расчетная диаграмма раскручивания каната представляется ломаной линией Oab, причем участок ab достаточно близко подходит к экспериментальной кривой после ее излома и имеет примерно такой же угол наклона.

Рассмотрим вопрос уравновешенности двухслойных канатов. Величина относительной неуравновешенности (III. 14) здесь запишется так:

$$\psi = \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} = \frac{S_2 r_2 \sin\beta_2 \cos^2\beta_2 - S_1 r_1 \sin\beta_1 \cos^2\beta_1}{S_2 r_2 \sin\beta_2 \cos^2\beta_2 + S_1 r_1 \sin\beta_1 \cos^2\beta_1}.$$

При одинаковых углах свивки

$$\psi = \frac{S_2 r_2 - S_1 r_1}{S_2 r_2 + S_1 r_1}. \qquad \text{(III. 32)}$$

Условие $\psi = 0$ приводит к такому соотношению:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

т. е. в уравновешенном канате отношение площадей поперечных сечений слоев прядей обратно пропорционально их средним радиусам. С конструктивной точки зрения это очень неблагоприятное условие, ибо при одинаковой радиальной толщине с увеличением радиуса площадь кольца, наоборот, растет. В двухслойном канате это приводит к необходимости построения наружного слоя прядей, состоящего из большого числа тонких круглых прядей.

Применением плоских или овальных прядей в наружном слое можно уменьшить их число в наружном слое.

В табл. 33 дано сравнение двухслойных канатов из табл. 32 по степени их неуравновешенности и по потере разрывной прочности от свободно подвешенного груза в соответствии с опытными данными. Неуравновешенность порядка 40—50% можно получить только при 16—17 тонких прядях в наружном слое. Число плоских прядей может быть уменьшено вдвое при неуравновешенности каната менее 30%.

Таблица 33

Снижение разрывной прочности при свободном растяжении двухслойных канатов в зависимости от степени неуравновешенности

№ по пор.	№ по табл. 32	Тип каната	Расчетная степень неуравновешенности ε	Снижение прочности на опыта $\frac{P_c - P_{\text{п.о.}}}{P_c}$	Примечание
1	2	(6×19) 0—(6×7) К+ о. с.	0,915	84,2	—
2	3	(12×7) К—(6×19)К—о. с.	0,655	54,7	ЧТМУ 5250—55
3	1	(12×7) К—(6×7) К+ о. с.	0,645	47,5	ГОСТ 768—55
4	6	(16×7) К—(5×19) 0+о. с.	0,512	25,0	—
5	5	(17×5) К—(5×19) 0+о. с.	0,422	20,8	—
6	4	(8×10) 0—(6×19) 0+о. с.	0,286	21,6	Наружные пряди плоские

В области неуравновешенности примерно до 50% потери разрывной прочности не превышают 20—25%, что представляет собой обычные потери агрегатной прочности в многослойных канатах, даже при разрыве без раскручивания.

При дальнейшем увеличении ε потери прочности канатов быстро растут, что в общем согласуется с картиной роста напряжений и в спиральных канатах (см. рис. 40). Таким образом, выбор допускаемой неуравновешенности некрутящихся канатов в пределах 40—50% является достаточно обоснованным как для спиральных, так и для канатов двойной свивки.

§ 23

ОДНОСЛОЙНЫЕ КАНАТЫ С УРАВНОВЕШЕННЫМИ ПРЯДЯМИ

Для практики конструирования обычных однослойных канатов представляет интерес исследование влияния уравновешенности прядей на их механические свойства. Ранее, в § 16, было показано, что на коэффициенты жесткости каната существенное влияние оказывает направление свивки проволок в прядях, выражающееся в величине и знаке коэффициента c_0 для прядей. Так, для односторонней свивки ($c_0 > 0$) основные коэффициенты жесткости каната A, B и C получаются бо́льшими, чем для крестовой ($c_2 < 0$). Поскольку на величину коэффициента c_0 можно повлиять соответствующим выбором направлений

свивки слоев проволок в пряди, то этим самым можно существенно регулировать механические свойства каната.

Так, коэффициенты податливости каната (II.39) существенно зависят от величины определителя

$$\Delta = AB - C^2.$$

Так как коэффициенты податливости слабо зависят от поперечного сужения каната, то их можно рассматривать при $\mu = 0$. Тогда при некоторых упрощениях этому определителю можно придать такой вид:

$$\Delta = m^2 (a_0 g_0 - c_0^2 \cos^2 2\beta) \cos^2 \beta,$$

где

$$g_0 = b_0 \cos^2 2\beta + g_0 \sin^2 2\beta.$$

К этому выражению мы приходим, если для вывода коэффициентов жесткости A, B и C деформации прядей [см. (II.54) и (II.55)] брать не на основании формул (I.88), а согласно (I.87).

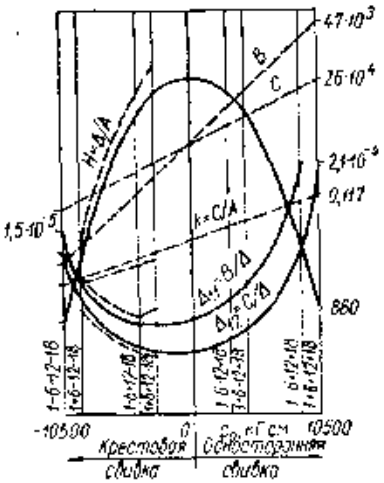


Рис. 43. Графики изменения механических свойств каната $6 \times 37 +$ о. с. диаметром 16 мм в зависимости от степени уравновешенности прядей.

Так как коэффициент c_0 входит сюда во второй степени, то величина Δ определяется только его абсолютным значением. По мере уменьшения c_0 величина Δ быстро растет и для уравновешенных прядей ($c_0 = 0$) принимает свое максимальное значение. Следовательно, канаты с уравновешенными прядями обладают некоторой экстремальностью механических свойств.

На рис. 43 показаны графики изменения коэффициентов жесткости и податливости в зависимости от степени уравновешенности прядей для каната $6 \times 37 +$ о. с. из табл. 22.

Изменение коэффициента c_0 для прядей осуществляется вариацией направлений свивки слоев проволок, как это отмечено знаками: $1 \pm 6 \pm 12 \pm 18$.

Положительный знак означает одностороннюю свивку данного слоя, отрицательный—крестовую. Экстремум механических свойств каната расположен вблизи точки $c_0 = 0$ со стороны крестовой свивки. Это объясняется тем, что определитель Δ имеет максимум точно при $c_0 = 0$, а графики коэффициентов B и C имеют наклон в сторону крестовой свивки. Поэтому минимум их отношений к Δ смещается от точки $c_0 = 0$ в сторону крестовой свивки.

В средней части графики идут полого. Это выгодно тем, что для получения каната с уравновешенными прядями не требуется точного выполнения условия $c_0 = 0$, т. е. это условие получается не жестким в практическом отношении. Достаточно в стандартных прядях типа 1×37 слои проволок просто свить в разные стороны. Пряди такой свивки будем называть уравновешенными.

Основной вывод, который можно сделать из этих графиков, состоит в следующем. Коэффициенты податливости Δ_{11} и Δ_{12} есть соответственно удлинение и угол раскручивания каната единичной длины под действием единичного свободно подвешенного груза. Следовательно, канат с уравновешенными прядями крестовой свивки (по наружному слою проволок) в условиях растяжения свободно подвешенным грузом обладает наименьшим удлинением и раскручиванием по сравнению с любыми другими вариантами его свивки. Крайние точки на этих графиках соответствуют полной крестовой (слева) и полной односторонней (справа) свивке каната. Представленный канат был изготовлен и испытан в трех вариантах свивки, указанных в табл. 22.

На рис. 35 показаны результаты испытаний этих канатов на растяжение свободно подвешенным грузом с измерением углов раскручивания и удлинений. Штриховыми линиями показаны расчетные величины.

Канаты изготовлены на тугокрученом трехпрядном полном сердечнике, обеспечивающем достаточные зазоры между прядями. Совпадение расчетных величин с опытными по линии нагружения получается вполне удовлетворительным. В табл. 23 показаны результаты испытаний и расчетные данные по определению крутящих моментов в этих канатах при чистом растяжении. Из таблицы видно, что расчетные формулы дают достаточно высокую точность при определении крутящих моментов.

Эти результаты опытов можно теперь перенести на графики рис. 43. Коэффициенты Δ_{11} и Δ_{12} можно получить, разделив соответственно опытные значения u и v на величину нагрузки и длину образца. В данном случае нами взяты их значения при нагрузке 400 *кГ*.

Жесткость каната при свободном кручении выражается так:

$$H = \frac{a}{A} = \frac{C}{A\Delta_{12}}.$$

На рис. 43 точки опытных данных соединены штриховыми линиями, которые хорошо приближаются к теоретическим графикам. Таким образом, имеются все основания полагать, что эти графики достаточно отражают изменения механических свойств каната в зависимости от величины c_0, по крайней мере, для области крестовой свивки.

Испытания канатов односторонней свивки по принятой методике не дают положительных результатов. При раскручивании каната односторонней свивки под действием свободно подвешенного груза пряди также раскручиваются (в канате крестовой свивки, наоборот, закручиваются). При раскручивании, как это показано выше, в § 17, прядь расслаивается и резко изменяет свои механические свойства. Графики на рис. 43 построены без учета расслоения прядей в области односторонней свивки каната, поэтому они не всегда имеют смысл.

Область односторонней свивки будет иметь реальный смысл только в том случае, когда канат подвергнется закручиванию или раскручиванию при достаточном начальном натяжении, обеспечивающем растягивающие усилия в наружном слое проволок. Такое сочетание нагрузок встречается, например, в шахтном подъеме, но в лабораторных условиях трудно осуществимо.

Применение уравновешенных прядей требует переменного направления свивки слоев проволок, что противостоит общей тенденции к массовому внедрению прядей с линейным контактом проволок. Однако в прядях ТЛК, в которых так или иначе применяется точечный контакт отдельных слоев проволок, принцип уравновешенности прядей может быть использован как одно из мероприятий по улучшению качества канатов. Таковыми являются канаты с прядями типа закрытый «Варрингтон», в которых

внутренняя часть имеет свивку ЛК и покрывается слоем проволок по типу ТК, например, прядь (1+6 | 6/6)±18 и т. д.

Применение переменного направления свивки точечно соприкасающихся слоев проволок приводит к двум положительным факторам. С одной стороны, уменьшается концентрация напряжений в наружных проволоках вследствие их точечного контакта (см. § 14), а с другой, — получается канат с уравновешенными прядями, который при работе на свободное растяжение имеет наименьшее раскручивание по сравнению со всеми другими вариантами свивки, что во многих случаях имеет существенное значение.

В табл. 34 приведены результаты расчета напряжений в таком канате при различных вариантах свивки прядей.

Расчет выполнен по схеме ЛК для двух вариантов свивки прядей:

$$1 + 6 + 6/6 + 18 = 19 + 18;$$
$$1 + 6 + 6/6 - 18 = 19 - 18.$$

Основными напряжениями при чистом растяжении каната являются нормальные напряжения от растяжения проволок. Остальные составляющие напряжений при чистом растяжении каната не имеют существенного значения и в расчетах опущены. При растяжении свободно подвешенным грузом составляющие напряжений от растяжения и кручения получаются равноценными по величине. При свободном растяжении распределение напряжений получается крайне неравномерным, и их величина при прочих равных условиях во много раз превосходит напряжения при чистом растяжении.

В канатах с уравновешенными прядями в два-три раза уменьшаются напряжения кручения. По осевым напряжениям σ_p существенный выигрыш от уравновешенности получается только при односторонней свивке, что имеет существенное значение, ибо канаты односторонней свивки обладают лучшим контактом проволок с поверхностью канавок блоков [20, 42, 92] и, следовательно, более работоспособны, но больше подвержены кручению, чем канаты крестовой свивки.

В канате с уравновешенными прядями можно получить сочетание положительных качеств крестовой и односторонней свивки.

Таблица 34

Расчет напряжений *кГ/мм²*, в канате 6×37+о. с. ТЛК диаметром 43,5 *мм* типа закрытый «Варрингтон» ($\beta = 18°$) (пряди № 9 из табл. 14) при нагрузке 1000 *кГ*

Свивка прядей и каната	Обычная свивка								Уравновешенные пряди							
	(19+18) 0				(19+18) К				(49—18) 0				(19—18) К			
Слои проволок	0	1	2/2'	3	0	1	2/2'	3	0	1	2/2'	3	0	1	2/2'	3
Напряжения от свободно подвешенного груза $\left(\frac{\sigma_p}{\tau}\right)$	18 6,4	12 5,9	3,7/1,5 5,6/4	—5,3 4,7	—7 4,1	—6 3,7	0,2/1,5 3,5/2,6	5,7 3	3,3 2	4,4 1,9	7,3/7,9 1,8/1,3	—4,1 1,5	0,4 1,8	—1,4 1,6	—3,6/—4,1 1,6/1,1	6,2 1,3
Напряжения при чистом растяжении	1,57 — 1,46				1,59 — 1,46				1,57 — 1,46				1,58 — 1,45			

Примечание. Символы «0» и «К» обозначают соответственно одностороннюю и крестовую свивку каната по внешним проволокам.

§ 24

О ПЛОТНОЙ СВИВКЕ В МНОГОСЛОЙНЫХ КАНАТАХ

Кроме соображений статического порядка, надежность работы конструкции каната обеспечивается его правильным геометрическим построением. Детально эти вопросы рассмотрены в главе I, где сформулированы основные условия плотной свивки каната.

Однако условия плотной свивки, вообще говоря, нельзя рассматривать независимо от деформаций, ибо в случае деформированного каната эти условия могут вообще не удовлетворяться, что часто приводит к нарушениям структуры каната при его работе.

Наиболее важным дефектом такого характера является нарушение радиального контакта между слоями прядей в многослойном канате при его общем сужении.

В этом отношении заслуживает внимания следующий небольшой геометрический расчет. В соответствии с формулой (1.28) внутренний диаметр слоя проволок или прядей из условия плотного тангенциального контакта определяется выражением

$$d_{в} = d_{пр}\frac{1-\xi}{\xi}, \qquad (а)$$

где $d_{пр}$ диаметр пряди;

$$\xi = \sin\Delta\sqrt{1+\cos^2\Delta\,\mathrm{tg}^2\beta}; \qquad (б)$$

$$2\Delta = \frac{2\pi}{m} - \sin 2\Delta\,\mathrm{tg}^2\beta. \qquad (в)$$

При растяжении многослойного каната углы свивки и диаметры прядей $d_{пр}$ изменяются, причем канат сужается. Однако сужение верхнего слоя прядей не может быть произвольным: оно ограничено тангенциальным контактом прядей. Поэтому, если внутренняя часть каната сужается быстрее, чем это позволяет тангенциальный контакт верхнего слоя, то происходит разрыв радиального контакта между слоями прядей.

Рассмотрим этот вопрос с теоретической стороны. Дифференцированием последних выражений можно найти относительное сужение рассматриваемого слоя прядей по внутреннему диаметру

$$\varepsilon_r = \frac{\delta d_{в}}{d_{в}} = \varepsilon_r' - \frac{\delta\xi}{\xi(1-\xi)},$$

где

$$\varepsilon_r' = \frac{\delta d_{пр}}{d_{пр}} = -\mu_0 \varepsilon_s$$

есть собственное сужение прядей от их относительного удлинения ε_s.

При определении дифференциала $\delta\xi$ рассматриваем ξ и Δ как функции от угла свивки β. В результате находим:

$$\varepsilon_r = -\mu_0 \varepsilon_s + \frac{\sin^2 2\Delta}{4(1-\xi)\xi^2} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos^3\beta}\delta\beta. \qquad (III.33)$$

После дифференцирования можно упростить результат, полагая

$$\xi = \sin\Delta; \ \Delta = \frac{\pi}{m}.$$

Окончательно получаем

$$\varepsilon_r = -\mu_0 \varepsilon_s + \left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\delta\beta. \qquad (III.34)$$

Деформации берём из (I.81):

$$\varepsilon_s = \varepsilon\cos^2\beta + r_0\theta\sin\beta\cos\beta + \varepsilon_r''\sin^2\beta;$$
$$\delta\beta = r_0\theta\cos^2\beta - (\varepsilon - \varepsilon_r'')\sin\beta\cos\beta,$$

где ε_r'' — относительное сужение по окружности слоя прядей, диаметр которой равен

$$d_0 = 2r_0 = \frac{d_{пр}}{\xi}.$$

Полагая, что прядь в целом получает радиальное смещение $\Delta r = \varepsilon_r d_0$, можно записать:

$$\varepsilon_2'' = \frac{d_{пр}}{d_0}\varepsilon_r = (1-\xi)\varepsilon_r \approx \left(1 - \sin\frac{\pi}{m}\right)\varepsilon_r.$$

Тогда, подставив в (III.34) эти значения деформаций, после преобразования находим:

$$\varepsilon_r = -\mu_1\varepsilon - k_1 r_0\theta, \qquad (III.35)$$

где

$$\mu_1 = \frac{\mu_0\cos^2\beta + \left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)\operatorname{tg}^2\beta}{1 + \mu_0\left(1 - \sin\frac{\pi}{m}\right)\sin^2\beta - \cos^2\frac{\pi}{m}\operatorname{tg}^2\beta};$$

$$k_1 = \frac{\mu_0\sin\beta\cos\beta - \left(1 + \sin\frac{\pi}{m}\right)\operatorname{tg}\beta}{1 + \mu_0\left(1 - \sin\frac{\pi}{m}\right)\sin^2\beta - \cos^2\frac{\pi}{m}\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Коэффициент поперечного сужения стальной пряди μ_0 не намного превышает коэффициент Пуассона, но меньше единицы.

Представим только чистое растяжение каната. Пусть коэффициент поперечного сужения внутренней части каната по внешнему диаметру d_0 равен μ_2. Тогда условие, обеспечивающее неразрывность радиального контакта между рассматриваемым слоем прядей и внутренней частью каната, запишется так:

$$\mu_1 > \mu_2.$$

Если внутренние слои при этом имеют коэффициент поперечного сужения

$$\mu_2 > \mu_1,$$

то происходит разрыв нормального контакта между слоями прядей: внутренняя часть каната сужается интенсивнее, чем это допускает плотная свивка наружных прядей. Коэффициент μ_1 по этой формуле получается меньше единицы.

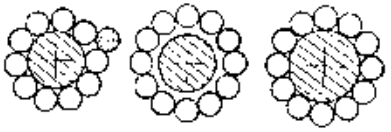


Рис. 44. К расчету совместности работы слоев в многослойном канате.

Представим теперь двухслойный канат, внутренний слой в котором есть обычный шестипрядный канат с органическим сердечником, для которого в новом состоянии коэффициент сужения μ_2 будет намного больше единицы, порядка 3—4 (см. § 16). Тогда при плотной свивке наружного слоя прядей в процессе растяжения каната внутренний слой, сужаясь интенсивнее, отрывается от наружного слоя прядей и последние, стесненные плотной свивкой, лишаются своего основания (рис. 44). Состояние наружного слоя при этом получается неустойчивым, одна из прядей обязательно вытесняется на поверхность каната и быстро разрушается на блоках. Такие случаи наблюдаются при испытании двухслойных канатов на нефтяных буровых вышках. После навески нового каната и приложения нагрузки одна из 12 наружных прядей оказывалась лишней и быстро разрушалась. После вырезки этой пряди канат работал нормально.

Отсюда следует, что в многослойном канате свивку наружного слоя прядей необходимо производить с достаточным зазором, обеспечивающим совместность работы слоев

прядей в радиальном направлении. Для этого расчет параметров плотной свивки каната надо вести с учетом последующего его сужения при рабочих нагрузках, принимая в расчет конструктивный коэффициент сужения внутреннего слоя прядей в соответствии с имеющимися данными (см. табл. 10).

Представляется целесообразным также применение обтяжки и рихтовки внутреннего слоя прядей с целью выбора его остаточного сужения перед свивкой наружного слоя прядей.

ГЛАВА 4

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ В КАНАТАХ

§ 25

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ СПИРАЛЬНОГО КАНАТА

Изгиб канатов на блоках и барабанах и связанные с ним напряжения в проволоках являются, пожалуй, решающим фактором в разрушении канатов. Возникающие при этом напряжения в проволоках могут быть разделены на три основные группы:

1. Первичные изгибные напряжения, связанные с изменением формы оси каната при ее изгибе.

2. Вторичные изгибные напряжения, связанные с раздавливанием прядей и канатов на шкивах и барабанах.

3. Внутренние и поверхностные контактные напряжения в проволоках, вызванные поперечной нагрузкой, действующей на канат.

В последующих двух главах рассматриваются напряжения только первой группы. Теория изгиба стальных канатов во многом подготовлена в уравнениях кинематической аналогии, изложенных в главе I, § 8.

В задаче изгиба каната нас интересуют: 1) пространственная форма оси проволоки, которую она принимает в изогнутом канате; 2) деформация и напряжения в поперечном сечении проволоки; 3) силовое взаимодействие проволок и прядей в изгибаемом канате.

Из всего комплекса напряжений превалирующими являются изгибные напряжения в проволоках. Поэтому, если ограничиться учетом только последних, то удовлетворительный ответ на первые два вопроса можно получить, пользуясь уравнениями кинематической аналогии. В расчете изгибных деформаций и напряжений нас интересуют не сама форма кривой оси проволоки, координаты ее точек, а компоненты ее пространственной кривизны и кручения.

В общем случае для спирального каната эти компоненты выражаются уравнениями кинематической аналогии (1.76) так:

$$\omega_b = -\frac{1}{\rho}\cos^2\alpha'\sin\psi + \frac{\sin^2\alpha'}{r};$$

$$\omega_n = \frac{1}{\rho}\cos\alpha'\cos\psi - \frac{d\alpha'}{ds};$$

$$\omega_t = \frac{1}{\rho}\sin\alpha'\cos\alpha'\sin\psi + \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{r}.$$

Неизвестными в этих выражениях являются: кривизна оси каната $1/\rho$ и переменный угол свивки α'. Однако радиус кривизны оси каната можно считать заданным его органом навивки. Тогда задача сводится к определению лишь угла α'. Даже при большом изгибе каната изменение его углов свивки будет незначительным по сравнению с его прямолинейным состоянием. Поэтому угол α' можно представить в виде суммы его начального постоянного значения α и некоторого малого переменного приращения $\eta(s)$ так:

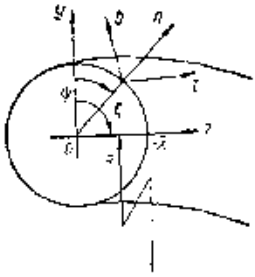


Рис. 45. Системы координат в сечении изогнутого каната.

$$\alpha' = \alpha + \eta(s). \qquad \text{(IV.1)}$$

В соответствии с (1.78) можно также записать:

$$\frac{d\alpha'}{ds} = \frac{d\eta}{ds} = \frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}.$$

Рассмотрим плоский изгиб каната относительно оси z (рис. 45) с постоянным радиусом $\rho = R$.

Ось y направим в сторону выпуклости каната. Тогда в формулах (1.76) кривизну каната следует считать отрицательной, а угол

$$\psi = \xi - \varphi = 90^\circ - \varphi.$$

Далее ввиду малости угла η можно записать:

$$\sin\alpha' = \sin\alpha + \eta\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha' = \cos\alpha - \eta\sin\alpha.$$

Величины η и $1/\rho$ следует считать малыми первого порядка, и их произведениями и степенями выше первой можно пренебречь.

В результате этих упрощений и преобразований выражения (1.76) в данном случае запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \omega_b &= \frac{\cos^2\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\sin 2\alpha}{r}\eta(\varphi) + \frac{\sin^2\alpha}{r}; \\ \omega_n &= -\frac{\cos\alpha}{R}\sin\varphi - \frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}; \\ \omega_t &= -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\cos 2\alpha}{r}\eta(\varphi) + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}. \end{aligned}\right\} \quad (IV.2)$$

Угловые деформации проволок в изгибаемом канате равны изменениям ее кривизны и кручения по сравнению с его прямолинейным состоянием. Третие члены в выражениях для ω_b и ω_t равны кривизне и кручению оси проволоки в прямом канате (1.67).

Отбросив эти составляющие, получим искомые деформации проволоки в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{\cos^2\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\sin 2\alpha}{r}\eta(\varphi); \\ \tilde{n} = \omega_n &= -\frac{\cos\alpha}{R}\sin\varphi - \frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}; \\ \tilde{t} &= -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\cos 2\alpha}{r}\eta(\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (IV.3)$$

Угол $\eta(\varphi)$, имея тот же порядок, во всяком случае будет меньшим отношения r/R, а так как $\cos\alpha > \sin\alpha$ в области реальных углов свивки, то в компонентах изгибных деформаций b и n преобладающее значение имеют первые члены. Поэтому некоторые неточности в определении угла $\eta(\varphi)$ не сопряжены с существенными ошибками в самих деформациях. Это позволяет при определении угла $\eta(\varphi)$, не привлекая сложных статических уравнений, воспользоваться упрощенными предпосылками.

Для этого проще всего привлечь геометрическое уравнение (1.86), определяющее приращение угла свивки в общем случае. Так как мы рассматриваем плоский изгиб каната по окружности, то в этом уравнении следует положить

$$\chi = -\frac{1}{R};\ \frac{dl}{ds} = 0;\ \nu = 0;\ \psi = 90^\circ - \varphi.$$

Отбросив также поперечное сужение каната, продольные и угловые смещения проволок, окончательно получим:

$$\eta(\varphi) = -\frac{r}{R}\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi. \qquad (IV.4)$$

Формулы (IV.3) приобретают окончательный вид:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{\cos 2\alpha}{R}\cos^2\alpha\cos\varphi; \\ \tilde{n} &= -\frac{1+\sin^2\alpha}{R}\cos\alpha\sin\varphi; \\ \tilde{t} &= -\frac{\sin 2\alpha}{R}\cos^2\alpha\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (IV.5)$$

Согласно этим значениям деформаций напряжения в проволоках спирального каната определяются по общим формулам, приведенным в § 10. Так, для круглой проволоки полные нормальные напряжения изгиба на ее контуре

$$\sigma_{из} = E\frac{\delta}{D}k(\varphi), \qquad (IV.6)$$

где

$$D = 2R;\ k(\varphi) = R\sqrt{\tilde{b}^2 - \tilde{n}^2}. \qquad (IV.7)$$

Экстремальные значения этого коэффициента

$$k_{max} = (k)_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} = (1+\sin^2\alpha)\cos\alpha; \qquad (IV.8)$$

$$k_{min} = (k)_{\varphi=0,\pi} = \cos 2\alpha\cos^2\alpha. \qquad (IV.9)$$

Наибольшие напряжения будут в точках c_1 и c_2 (рис. 46) в поперечном сечении проволоки, расположенном на оси изгиба каната z. Минимум наибольших напряжений будет в точках c_3 и c_4, расположенных на оси y.

Выражение (IV.6) совпадает с известной формулой Рело [48, 101] для изгибных напряжений в канате с поправочным коэффициентом k (IV.7), величина которого давно является предметом дискуссии (см. «Введение»). По формуле (IV.8) величина этого коэффициента получается больше единицы. При угле свивки примерно 35° получаем наибольшее его значение, равное $k_{max} = 1{,}09$. Этот результат может показаться несколько сомнительным, поскольку

до сих пор в истории эволюции этого коэффициента его искали как заведомо меньше единицы. Рассмотрим возможную ошибку наших расчетов. Максимум изгибных напряжений определяется компонентом изгиба n, который до выражения (IV.3) записан без каких-либо упрощений, кроме предположения о малости деформаций.

При переходе к выражениям (IV.5) было использовано выражение (IV.4) для приращения угла свивки, найденное из несколько упрощенных предпосылок. Поэтому неточности следует ожидать со стороны выражения (IV.4), которое в (IV.8) даст второй член в в скобках $\sin^2 \alpha$. Следовательно, если вообще не учитывать изменения углов свивки, которое направлено в сторону увеличения коэффициента (IV.8), то

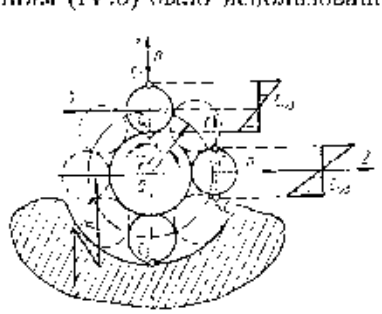


Рис. 46. Поперечное сечение изогнутого спирального каната.

$$k_{max} = \cos \alpha. \quad (IV.10)$$

Ввиду малости угла свивки α, эта величина также приближается к единице со стороны меньших значений. Таким образом, возможная ошибка в определении углов свивки не приводит к существенной ошибке в максимальных изгибных напряжениях в спиральном канате.

Работоспособность каната определяется не только максимальными изгибными напряжениями, но в большей степени их сочетанием с контактными напряжениями в точках c_5 соприкосновения с поверхностью шкива (рис. 46). С этой точки зрения нас больше интересует значение этого коэффициента по формуле (IV.9).

Компонент кручения $\tilde{t}$ связан с угловой скоростью вращения триэдра (b, n, t) и не всегда определяет деформацию кручения проволок (см. § 8). Проволоки фасонного профиля в закрытых канатах или обжатых прядях (рис. 47) не могут проворачиваться в поперечном сечении каната или пряди и жестко связаны с триэдром (b, n, t). Для таких проволок деформация кручения определяется выражением (IV.5). Круглые проволоки могут проворачиваться в поперечном сечении каната, и их упругое кручение не следует

кручению триэдра (b, n, t). Поэтому кручение круглых проволок следует уточнить привлечением уравнения статики. Для этого достаточно взять третье уравнение из системы (1.59):

$$\frac{dL_t}{ds} - \omega_n L_b + \omega_b L_n = -m_t. \qquad \text{(IV.11)}$$

Здесь изгибающие моменты определяются через изгибные деформации $\tilde{n}$ и $\tilde{b}$ из формулы (IV.5) следующим образом:

$$L_b = EI\tilde{b}; \quad L_n = EI\tilde{n}.$$

В соответствии с выражениями (IV.2) и (IV.5)

$$\tilde{n} = \omega_n; \quad \omega_b = \tilde{b} + \frac{\sin^2\alpha}{r}.$$

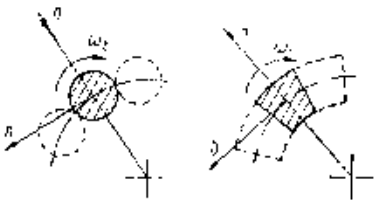


Рис. 47. К расчету деформаций кручения в проволоках.

Крутящий момент можно выразить через искомую деформацию кручения

$$L_t = GI_p t.$$

Пренебрегая силами трения, внешний момент m_t, действующий на круглую проволоку, полагаем равным нулю.

В результате уравнение (IV.11) перепишется так:

$$GI_p \frac{d\tilde{t}}{ds} = -\frac{\sin^2\alpha}{r} EI\tilde{n}.$$

После интегрирования и необходимых преобразований находим:

$$\tilde{t} = -\frac{EI}{GI_p} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2R} \sin 2\alpha \cos\varphi. \qquad \text{(IV.12)}$$

Вообще напряжения кручения получаются незначительными, и их в расчет можно не принимать.

Для проволок фасонного профиля деформация кручения $\tilde{t}$ определена выражением (IV.5). Поэтому с помощью уравнения (IV.11) можно найти внешний крутящий момент m_t, действующий на проволоку, а так как этот момент особого самостоятельного значения не имеет, то на нем мы не останавливаемся.

Самостоятельное значение в качестве подъемных или несущих канатов имеют спиральные закрытые канаты.

В проволоках фасонного профиля в соответствии с рис. 21 изгибные напряжения определяются по общей формуле:

$$\sigma_{из} = E(n\tilde{b} - b\tilde{n}).$$

Расчет удобнее производить в полярных координатах:

$$\sigma_{из} = E\xi(\tilde{b}\sin\gamma - \tilde{n}\cos\gamma). \qquad (IV.13)$$

Выбрав точку (ξ, γ), исследуем на максимум ее деформацию как функцию полярного угла φ, т. е. найдем то положение поперечного сечения проволоки в канате, в котором напряжения в данной точке будут наибольшими. Для этого полагаем

$$\frac{\partial\sigma_{из}}{\partial\varphi} = 0$$

и в соответствии с (IV.5) приходим к такому уравнению:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos 2\alpha\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha}\operatorname{tg}\gamma.$$

Расчет максимальных напряжений ведется следующим образом. Выбираем на контуре профиля наиболее удаленную от центра тяжести его площади точку и находим ее координаты ξ и γ. Затем по данному уравнению определяем угол φ, при котором будет максимум напряжений для этой точки, и завершаем расчет напряжений по формуле (IV.13).

§ 26

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ КАНАТА ДВОЙНОЙ СВИВКИ

Так как винтовая ось пряди в канате двойной свивки геометрически подобна оси проволоки в спиральном канате, то все кинематические и геометрические уравнения, полученные для спирального каната, полностью относятся к оси пряди. Изгибные деформации (IV.5) проволоки в спиральном канате определяют таким образом пространственную изгибную деформацию пряди.

Рассматривая теперь прядь как пространственно изгибаемый спиральный канат, пользуясь той же теорией, можно найти изгибные деформации и напряжения в проволоках пряди. Для этого положение оси пряди в попереч-

ном сечении каната будем фиксировать полярным углом γ, как это показано на рис. 48. Тогда первые два выражения из (IV.5), определяющие пространственную изгибную деформацию пряди, в новых обозначениях запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b}_{\text{пр}} &= \frac{\cos 2\beta}{R}\cos^2\beta\cos\gamma; \\ \tilde{n}_{\text{пр}} &= -\frac{1+\sin^2\beta}{R}\cos\beta\sin\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.14)}$$

где β — угол свивки прядей в канат.

Расчет изгибных напряжений рассматривается только применительно к круглопрядным канатам. Кроме этих компонентов изгиба, круглая прядь испытывает деформацию кручения, определяемую выражением (IV.12). В этом выражении вместо EI следует подставить изгибную жесткость пряди g_0, а вместо GI_p — жесткость пряди при свободном кручении, определяемую как для спирального каната согласно (II.45):

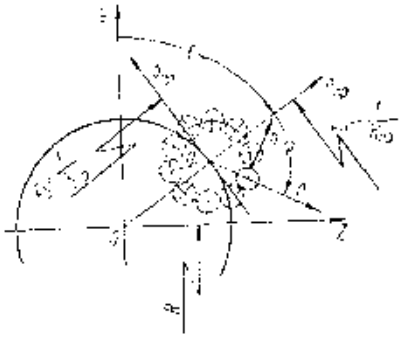


Рис. 48. Системы координат в сечении каната двойной свивки.

$$H = b_0 - \frac{c^2}{a_0}.$$

В результате получаем деформацию кручения пряди

$$\tilde{t}_{\text{пр}} = -\frac{g_0}{H}\cdot\frac{1+\sin^2\beta}{2R}\sin 2\beta\cos\gamma. \qquad \text{(IV.15)}$$

Далее напряжения в пряди рассчитываем как в спиральном канате, испытывающем изгиб в двух плоскостях и свободное кручение.

Напряжение от изгиба рассчитываем по тем же формулам (IV.5) следующим образом. Прядь испытывает изгиб в двух плоскостях — относительно оси $b_{\text{пр}}$ по радиусу

$$\rho_b = \frac{1}{\tilde{b}_{\text{пр}}} \qquad \text{(а)}$$

и относительно оси $n_{\text{пр}}$ по радиусу

$$\rho_n = \frac{1}{\tilde{n}_{\text{пр}}}, \qquad \text{(б)}$$

в которых знаки определены в соответствии с положительным направлением угловых скоростей (см. § 8).

Из рис. 48 видно, что прядь относительно радиуса изгиба ρ_b ориентирована так же, как весь канат, — относительно радиуса R. Тогда деформации проволок при изгибе пряди по радиусу ρ_b запишутся в той же форме (IV.5) при соответствующей замене обозначений, т. е.

$$\tilde{b}' = \frac{\cos 2\alpha}{\rho_b} \cos^2 \alpha \cos \varphi;$$

$$\tilde{n}' = -\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\rho_b} \cos \alpha \sin \varphi.$$

При изгибе относительно оси $n_{пр}$, прядь ориентирована так же, как и относительно оси $b_{пр}$, но со сдвигом по φ на $+\frac{\pi}{2}$. Тогда компоненты изгиба проволок при изгибе пряди по радиусу ρ_n запишутся так:

$$\tilde{b}'' = -\frac{\cos 2\alpha}{\rho_n} \cos^2 \alpha \sin \varphi;$$

$$\tilde{n}'' = -\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\rho_n} \cos \alpha \cos \varphi.$$

Полученные выражения для изгибных деформаций проволоки как кинематические величины по одноименным осям можно просто сложить. В результате после подстановки радиусов изгиба согласно уравнениям (а) и (б) полные деформации проволок от пространственного изгиба пряди с кручением запишутся окончательно так:

$$\tilde{b} = \frac{1}{R} \lambda_b (\varphi, \gamma); \quad \tilde{n} = \frac{1}{R} \lambda_n (\varphi, \gamma), \qquad \text{(IV.16)}$$

где

$$\lambda_b (\varphi, \gamma) = [(1 + \sin^2 \beta) \sin \gamma \sin \varphi +$$
$$+ \cos 2\beta \cos \beta \cos \gamma \cos \varphi] \cos 2\alpha \cos^2 \alpha \cos \beta + \lambda_t; \qquad \text{(IV.17)}$$

$$\lambda_n (\varphi, \gamma) = [(1 + \sin^2 \beta) \sin \gamma \cos \varphi -$$
$$- \cos 2\beta \cos \beta \cos \gamma \sin \varphi] (1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha \cos \beta. \qquad \text{(IV.18)}$$

Величина λ_t в первом выражении (IV.17) учитывает неизвестную пока деформацию изгиба проволоки от кручения пряди, которую находим следующим образом.

При кручении пряди проволока испытывает дополнительный изгиб относительно оси b, определяемый выражением (II.34):

$$\tilde{b}_t = \tilde{t}_{пр}(1 + \cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\varepsilon_{пр}}{r}\cos^2\alpha\sin^2\alpha,$$

где в качестве кручения пряди необходимо принять в расчет величину (IV.15). Кручение пряди при изгибе каната является свободным, т. е. происходит без изменения осевого усилия. Следовательно, относительное удлинение пряди при этом следует искать из уравнения (II.46)

$$\varepsilon_{пр} = -\frac{c_0}{a_0}\tilde{t}_{пр}.$$

Тогда, принимая во внимание это выражение и подставляя в предыдущее уравнение значение деформаций кручения из (IV.15), находим:

$$\tilde{b}_t = \frac{l}{R}\lambda_t(\gamma); \qquad \text{(IV.19)}$$

$$\lambda_t(\gamma) = \mp\frac{g_0}{H}\left[1 + \cos^2\alpha + \frac{c_0}{a_0}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2r}\right]\times$$
$$\times\frac{1+\sin^2\beta}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos\gamma. \qquad \text{(IV.20)}$$

В отличие от предыдущих выражений (IV.17) и (IV.18) в последней формуле $\sin\alpha$ входит в нечетной — первой степени, поэтому знак в правой части этого выражения зависит от направления свивки проволок в пряди: для односторонней свивки $\alpha > 0$ знак будет минус, для крестовой, наоборот, — знак плюс.

Полное относительное удлинение и напряжение от изгиба на контуре круглой проволоки запишутся так:

$$\varepsilon_{из} = k\frac{z}{D}; \quad \sigma_{из} = Ek\frac{z}{D}, \qquad \text{(IV.21)}$$

где

$$k = \sqrt{\lambda_a^2 + \lambda_b^2}. \qquad \text{(IV.22)}$$

Исследуем эту величину на максимум. Обычные условия экстремума для k как функции двух переменных γ и φ запишутся так:

$$\frac{\partial k}{\partial\varphi} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial\gamma} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 k}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial^2 k}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2 k}{\partial\varphi\partial\gamma}\right)^2 > 0.$$

Эта система уравнений имеет множество решений, и искать их в общем виде затруднительно. Однако можно показать, что условия экстремума удовлетворяются при γ и φ, кратных $\pm\frac{\pi}{2}$. При $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 0, \pi$ имеем максимум:

$$k_{max} = (1 + \sin^2\alpha)(1 + \sin^2\beta)\cos\alpha\cos\beta. \quad (IV.23)$$

Поперечные сечения проволок *1* (рис. 49) с максимумом изгибной деформации в точках c_1 и c_2 расположены вместе с осью пряди на оси изгиба каната *z*. Величина максимума не зависит, как видим, от знаков углов α и β и одинакова как для крестовой, так и для односторонней свивки каната.

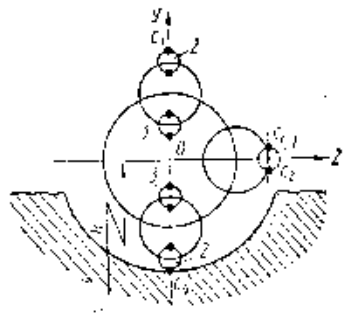


Рис. 49. Характерные точки в сечении изогнутого каната.

Наибольшего значения коэффициент k_{max} достигает так же, как и в спиральном канате, при $\alpha = \beta = 35°$:

$$k_{max} = 1{,}17.$$

Минимум изгибной деформации также не зависит от направления свивки каната

$$k_{min} = \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos^2\alpha \cos^2\beta -$$

$$- \frac{g_0}{H}\left(1 + \cos^2\alpha + \frac{c_0}{a_0} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2r}\right)\frac{1 - \sin^2\beta}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta. \quad (IV.24)$$

Минимум относится к крайним точкам на контуре круглых проволок, расположенных вместе с осью пряди на оси *y* в поперечном сечении каната. При этом для односторонней свивки минимум будет для сечений проволок *2—2*, выступающих на поверхность каната при $\gamma = 0, \pi$; $\varphi = 0$. Для крестовой свивки минимум будет в сечениях проволок *3—3*, обращенных внутрь каната, при $\gamma = 0, \pi$ и $\varphi = \pi$. Для сечений *2—2*, выступающих наружу каната, при его крестовой свивке

$$k_{min} = \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos^2\alpha \cos^2\beta +$$

$$+ \frac{g_0}{H}\left(1 + \cos^2\alpha + \frac{c_0}{a_0} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2r}\right)\frac{1 - \sin^2\beta}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta. \quad (IV.25)$$

Так как сечения проволок *2—2* выступают наружу каната и входят в соприкосновение с поверхностью желоба шкива, подвергаясь дополнительным контактным напряжениям и истиранию, то их напряженное состояние имеет большее значение для оценки работоспособности каната, чем сам максимум напряжений в положении сечения *1*.

В сечениях *2—2* имеется минимум изгибных напряжений и деформаций только для односторонней свивки каната; для крестовой свивки эти напряжения больше. Таким образом, в этом отношении односторонняя свивка каната имеет определенные преимущества перед крестовой. Направление деформаций таково, что в точке c_2 верхнего сечения *2* имеет место растяжение, в диаметрально противоположной точке c_1 — сжатие.

§ 27

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Опыты по определению изгибных напряжений в канатах описаны преимущественно в отечественной литературе. Это — прежде всего опыты Г. Н. Савина и В. Г. Бессонова [83, 85], Г. П. Жданова [44, 45, 46], А. М. Пенькова и А. С. Бондарчука [76]. Во всех этих работах напряжения или, вернее, деформации измерялись посредством проволочных датчиков, наклеиваемых на поверхность проволок в наиболее доступных местах — со стороны выпуклости каната (см. рис. 46, точка c_3), где, по нашим расчетам, имеет место минимум наибольших изгибных напряжений.

Очень важным для принципиальной оценки кинематической теории изгиба является то, что во всех этих работах, независимо друг от друга, предметом специального исследования являлось изучение зависимости изгибных напряжений в канате от его осевого натяжения.

Все авторы получили один и тот же результат: изгибные напряжения в проволоках каната не зависят от его предварительного осевого натяжения в пределах рабочих нагрузок. Канаты при этом доводились до натяжения не ниже шестикратного запаса прочности. Положение при более высоких нагрузках остается пока не выясненным.

Таблица 35

Относительное удлинение крайнего волокна проволоки $\varepsilon_{из} \cdot 10^5$ при различных натяжениях в спиральном канате (пряди) 1 + 6 + 12, δ — 1,2 *мм* до и после изгиба на шкиве диаметром D — 406 *мм*

№ измерения	Запас прочности при растяжении														
	37			18,3			12,2			9,2			7,3		
	Растягивающая нагрузка, *кг*														
	94			188			282			376			470		
	Прямой канат	После изгиба	Разность	Прямой канат	После изгиба	Разность	Прямой канат	После изгиба	Разность	Прямой канат	После изгиба	Разность	Прямой канат	После изгиба	Разность
1	0	262	262	23	288	265	46	314	268	72	336	264	95	365	270
2	0	270	270	20	288	268	44	308	264	69	336	267	90	362	272
3	0	264	264	23	282	259	44	314	270	67	334	267	90	357	267
Среднее арифметическое	—	—	265	—	—	264	—	—	267	—	—	266	—	—	270

В табл. 35 представлены опыты Г. П. Жданова [44, 45, 46] для спиральной пряди 1 + 6 + 12. Датчики в этих опытах наклеивались на прямой ветви каната, после чего к нему прикладывалась осевая нагрузка и измерялись показания датчиков. Затем участок каната с датчиками в состоянии натяжения переводился на блок, и снова отмечались показания датчиков. Разность показаний датчиков до и после изгиба каната была равна изгибной деформации проволок в результате изгиба натянутого каната. Эта разность в опытах Г. П. Жданова и других перечисленных выше авторов оставалась неизменной от натяжения каната. Следовательно, возможное изменение изгибных напряжений в канате с изменением натяжения находится в пределах точности измерений и поэтому не обнаруживается на опыте.

В табл. 36 показано сравнение расчетного относительного удлинения с опытами Г. П. Жданова.

Таблица 36

Результаты опытов Г. П. Жданова

Характеристика пряди	Диаметр изгиба D, *мм*	D/d	Относительное удлинение крайних волокон проволок со стороны выпуклости каната	
			из опыта	по расчету
$d = 6$ *мм*, 1 + 6 + 12; $\delta = 1{,}2$ *мм*; $\alpha = 11°$	305	51	$3{,}66 \cdot 10^{-3}$	$3{,}50 \cdot 10^{-3}$
	406	68	$2{,}65 \cdot 10^{-3}$	$2{,}53 \cdot 10^{-3}$

Эти опыты относятся к точке минимума изгибных напряжений. Точка максимума изгибных напряжений до сих пор не была известна, и в литературе опыты по определению этих напряжений или деформаций отсутствуют. Постановка таких опытов вообще затруднительна, так как точка максимума напряжений не выступает наружу каната и недоступна для экспериментов. Поэтому для оценки положения максимума изгибных напряжений в канате нами была проведена серия следующих опытов [38].

Канаты подвергались переменному чистому изгибу без контакта со шкивом и натяжения, чтобы исключить влияние этих факторов, и фиксировалось распределение изломов проволок в различных областях по периметру попе-

речного сечения каната. Пределы изменения радиуса изгиба каната не фиксировались, так как эксперимент носил чисто качественный характер.

Разрушение всех образцов прядей начиналось с области, примыкающей к центральной оси z, т. е. с боков каната. Наименьшее число изломов (10%) проволок приходилось на стороны выпуклости или вогнутости каната. Так как в этом опыте единственным фактором усталостного разрушения проволок являлись напряжения изгиба, то по преимущественному распределению изломов можно судить о положении максимума напряжений с боков каната.

Ниже приводятся результаты опытов по распределению изломов проволок по периметру сечения канатов (тип $1+6+12$, $d=6$ *мм*) при чистом изгибе:

Число испытанных образцов	8
Число циклов изгиба при наблюдении	8500—13 000
Распределение порывов проволок:	
область оси z	70%
промежуточная область	20%
область оси y	10%

При работе на блоках, наоборот, порывы проволок появляются преимущественно со стороны области контакта со шкивом. Причину в этом следует искать в сочетании различных факторов, и прежде всего контактных напряжений.

В опытах Г. Н. Савина и В. Г. Бессонова [85] испытаниям на изгиб были подвергнуты закрытые канаты (ГОСТ 3090—46). Датчики также наклеивались на поверхность проволок со стороны выпуклости каната. Результаты этих опытов представлены на рис. 50.

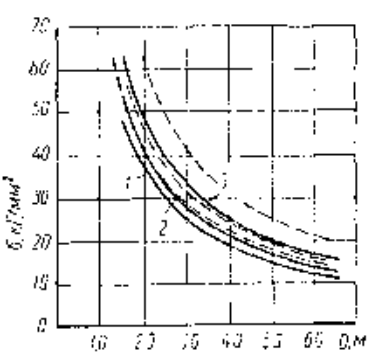


Рис. 50. График изгибных напряжений в закрытых канатах

Конструкция канатов в этих опытах не описана, кроме указания на ГОСТ 3090—46 и их диаметров: № 1 — $d=38$ *мм*; № 2 — $d=40$ *мм*; № 3 — $d=46$ *мм*.

По данным этого стандарта указанные канаты имеют высоту $\Delta = 6$ *мм* профиля наружных Z-образных проволок. Угол свивки не указан.

Расчет напряжений для этих точек ведется по общей формуле при $\varphi = 0$:

$$\sigma_{из} = E \frac{\Delta}{D} \cos 2\alpha \cos^2 \alpha.$$

Для оценки этих данных угол свивки нами был принят ориентировочно из области близких его значений: $\alpha = 18^\circ 30'$; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^4$ *кГ/мм²*. Расчет при этом представлен штриховой линией на рис. 49.

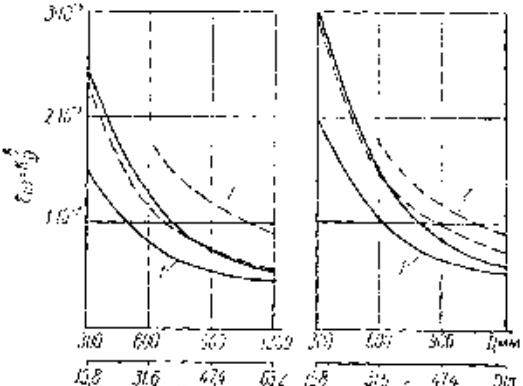


Рис. 51. График изгибных деформаций проволок в канате 6 × 19 + о. с. диаметром 19 *мм*; $\delta = 1{,}2$ *мм*, $\alpha = 11^\circ$; $\beta = 17^\circ 40'$ односторонней и крестовой свивки по данным Г. П. Жданова.

Если угол свивки уменьшить до 17°, то получим среднюю штриховую линию. При углах свивки, равных нулю, получим верхнюю штриховую кривую, т. е. расчет выйдет далеко за пределы опытов. В общем, получается удовлетворительное согласование расчетов с опытами.

В этих опытах обнаруживается слабая зависимость изгибных напряжений от диаметров каната, т. е. от отношения D/d, но об этом можно было бы с уверенностью судить, если бы были точно известны углы свивки. Колебания в углах свивки, как было показано, могут привести к ложным суждениям в этом вопросе.

В опытах Г. П. Жданова [45] были испытаны два одинаковых каната двойной свивки с такими данными: диаметр каната $d = 19$ *мм*; диаметр проволок $\delta = 1{,}2$ *мм*;

угол свивки проволок в прядь $\alpha = 11^\circ$; угол свивки прядей в канат $\beta = 17^\circ 40'$. При этом был взят один канат крестовой свивки (6 × 19) К + о. с. (рис. 51, *б*), другой — односторонней (6 × 19) О + о. с. (рис. 51, *а*). Сплошными линиями на рисунке показаны результаты опытов Г. П. Жданова, штриховыми линиями — расчет по формулам (IV.24) и (IV.25). Нижняя тонкая сплошная линия *1* представляет расчеты Г. П. Жданова по его формулам, верхняя штриховая линия *2* — расчеты по известной формуле М. М. Федорова [93]

$$k = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta.$$

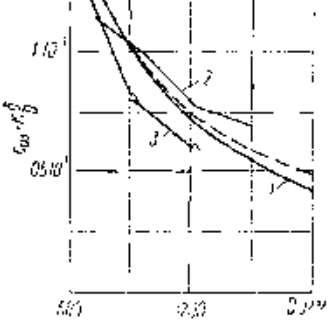


Рис. 52. График изгибных деформаций проволок в канате крестовой свивки.

Диаметр изгиба каната в опытах Г. П. Жданова изменился от 300 до 1200 *мм*, что охватывает диапазон изменения отношения D/d от 15,8 до 63, т. е. ту область, в которой работает большинство всех подъемно-транспортных устройств.

Совпадение наших расчетов с опытами получается отличным во всей области изменения отношения D/d, особенно для канатов односторонней свивки. Наибольшее расхождение результатов получается для каната крестовой свивки при $D = 1200$ *мм* и достигает 16%, причем расчет здесь идет в запас прочности. Во всей остальной области расхождение результатов значительно меньше.

Расчеты Г. П. Жданова (линия *1*) дают значительно заниженные результаты, особенно при малых D/d. Формула М. М. Федорова (линия *2*) дает завышенные результаты.

На рис. 52 показано сравнение наших расчетов с опытами Г. Н. Савина, В. Г. Бессонова (линия *1*) и А. М. Пенькова, А. С. Бондарчука (линия *2*) для каната 6 × 19 + + о. с. диаметром 18,5 *мм* и $\delta = 1{,}2$ *мм*. Подобная характеристика каната не указана, поэтому его данные взяты из опытов Г. П. Жданова для каната крестовой свивки, так как по типам и размерам они во всем совпадают.

Здесь наиболее важным является совпадение по диаметрам проволок, а отличие в диаметрах канатов 19 и 18,5 мм можно отнести за счет ошибки измерений. Здесь же нанесены данные опытов Г. П. Жданова (линия *3*).

Эти графики представляют сводные результаты трех опытов примерно для одного и того же каната, проведенных различными авторами в различное время. Каждый опыт сопровождается неизбежными ошибками измерений. Расчетная штриховая линия проходит внутри области разброса результатов измерений, ограниченной линиями *2* и *3*, наиболее близко к опытам Г. Н. Савина и В. Г. Бессонова.

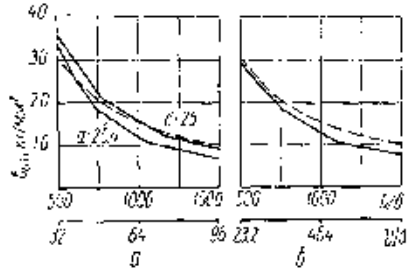


Рис. 53. График изгибных деформаций в канатах:

а — 6 × 19 + 1 о. с. диаметром 26 и 28,5 мм, б — 6 × 37 + 1 о. с. диаметром 34,0 мм.

Таким образом, все это вместе взятое показывает достаточную точность полученных нами расчетных формул для изгиба стальных канатов и приемлемость основных предпосылок к расчетной схеме.

На рис. 53 показаны сравнения с опытами Г. Н. Савина и В. Г. Бессонова из той же статьи. Так как полная характеристика канатов в этой статье не указана, кроме их конструкции, диаметров канатов и проволок, для наших расчетов не достает лишь углов свивки. Поэтому для расчетов нами взяты их стандартные шаги свивки: для прядей в канат с кратностью 7,5, для проволок в прядь с кратностью 10. Это приводит округленно к таким углам свивки: $\alpha = 12^\circ$, $\beta = 16^\circ$.

Пряди при этом соответствуют № 2 и № 3 из табл. 14, причем для пряди 1 × 19 независимо от диаметра проволок

$$\frac{g_0}{H} = \frac{a_0 d_0}{a_0 b_0 - c_0^2} = 0{,}73;$$

для пряди 1 × 37

$$\frac{g_0}{H} = 0{,}61.$$

В соответствии с этим коэффициент k из (IV. 25) для каната $1 \times 19 + о.\ с.$ (диаметром 25 и 26,4 *мм*) $k = 0{,}77$; для каната $6 \times 37 + о.\ с.$ (диаметром 34,5 *мм*) $k = 0{,}76$.

По этим данным при $E = 2 \cdot 10^3$ *кГ/мм²* и построены расчетные пунктирные линии на рис. 52.

§ 28

ИЗГИБ ПРЯДЕЙ В ПРЯМОМ КАНАТЕ

При растяжении и кручении канатов двойной свивки мы сталкиваемся с деформациями изгиба прядей в прямолинейном канате. Построенная теория изгиба спиральных канатов позволяет подойти к расчету возникающих при этом напряжений.

Прядь получает изгиб в плоскости ее начальной кривизны, определяемый формулой (I.54):

$$\tilde{b}_{пр} = \delta\,(1 + \cos^2\beta)\sin\beta \times \cos\beta + (\varepsilon_r - \varepsilon)\frac{\sin^2\beta\cos^2\beta}{r_0}.$$

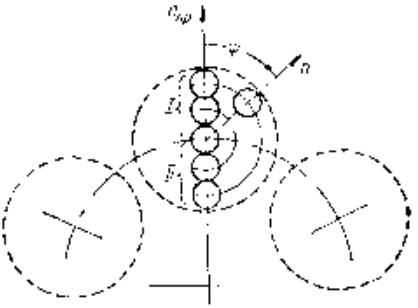


Рис. 54. К расчету изгибных напряжений в прядях прямого каната.

Для определения изгибных деформаций проволок в пряди эту величину необходимо подставить в выражения (IV.5) вместо $1/R$. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b}' &= \tilde{b}_{пр}\cos 2\alpha\cos^2\alpha\cos\varphi; \\ \tilde{n}' &= -\tilde{b}_{пр}(1 + \sin^2\alpha)\cos\alpha\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (IV.26)$$

где угол φ отсчитывается от оси $n_{пр}$ в поперечном сечении пряди, как это показано на рис. 54.

Кроме того, растяжение и кручение пряди также сопровождается изгибной деформацией проволок, которая определяется третьим выражением из (II. 34) так:

$$\tilde{b}'' = \tilde{\gamma}_{пр}(1 + \cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha - \varepsilon_{пр}\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{r}, \qquad (IV.27)$$

где деформации $\tilde{\gamma}_{пр}$ и $\varepsilon_{пр}$ следует брать по формулам (II.53) и (II. 55).

Полная изгибная деформация проволок при изгибе относительно оси b

$$\tilde{b} = \tilde{b}' + \tilde{b}''. \qquad \text{(IV.28)}$$

Изгибные напряжения определяются по общим формулам.

Наибольшие изгибные напряжения возникают в сечениях проволок при $\varphi = 0$, расположенных на оси $n_{пр}$ в поперечном сечении пряди. Их максимум будет в зоне I или в зоне II в зависимости от направления кручения каната и его направлений свивки.

Таблица 37

Изгибные напряжения, *кГ/мм²*, в прядях каната 6 × 37 + о. с. ТЛК, ∅ 43,5 *мм* (1 + 6 + 6/6 + 18) от свободно подвешенного груза 1000 *кГ*

Тип свивки	Слои проволок	$\sigma_{изг}$, *кГ/мм²* I	$\sigma_{изг}$, *кГ/мм²* II	Тип свивки	Слои проволок	$\sigma_{изг}$, *кГ/мм²* I	$\sigma_{изг}$, *кГ/мм²* II
(19 + 18)0	0	= 11,8		(19 — 18)0	0	∓ 3,7	
	1	∓ 15,6	∓ 5,8		1	± 1,9	∓ 4,8
	2	∓ 17,7	∓ 1,6		2	+ 0,6	+ 5,5
	2′	∓ 13,2	∓ 0,5		2′	—	—
	3	∓ 15,4	+ 0,8		3	∓ 4,8	+ 0,2
(19 + 18) K	0	∓ 7,3		(19 — 18) K	0	= 3,2	
	1	∓ 3,6	∓ 9,7		1	∓ 4,7	∓ 1,5
	2	∓ 0,8	∓ 11,0		2	∓ 4,7	∓ 0,4
	2′	∓ 0,5	± 8,2		2′	± 3,5	∓ 0,2
	3	∓ 0,32	+ 9,9		3	∓ 0,2	∓ 4,1

В развитие предыдущих расчетов (см. табл. 34), связанных с анализом напряжений в канатах с уравновешенными прядями, в табл. 37 даны результаты вычислений изгибных напряжений в прядях для того же каната 6 × × 37 + о. с. типа закрытый «Варрингтон». Напряжения вычислены по зонам I и II (рис. 54). Верхний знак относится к крайним волокнам проволоки, направленным наружу пряди, нижний — к диаметрально противоположным. Сопоставляя эти данные с табл. 34, видим, что изгибные напряжения в проволоках каната при его свободном растяжении по своей величине не уступают напряжениям от осевого растяжения и кручения. В канатах с

уравновешенными прядями, благодаря их меньшему кручению, изгибные напряжения в прядях снижаются в общем примерно в два раза и более.

§ 29

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ В КАНАТАХ

Процесс свивки каната представляет собой изгиб прядей по винтовым линиям, сопровождающийся также их некоторым кручением. Натяжение прядей после свивки каната исчезает и поэтому, хотя и играет существенную роль в формировании каната, с точки зрения вызываемых им технологических напряжений может быть отнесено ко второстепенным факторам. Главными, конечно, являются технологические изгибные напряжения, и второе место занимают напряжения кручения.

Кривизна винтовой оси пряди определяется известным выражением

$$K = \frac{\sin^2\beta}{r_0}. \qquad \text{(IV.29)}$$

Подставив это значение кривизны в формулы (IV.5), получим значения технологических изгибных деформаций в проволоках прядей в виде:

$$\bar{b}'_{1\text{техн}} = \frac{\sin^2\beta}{r_0}\cos 2\alpha\cos^2\alpha\cos\varphi; \qquad \text{(IV.30)}$$

$$\bar{n}'_{1\text{техн}} = -\frac{\sin^2\beta}{r_0}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha\sin\varphi. \qquad \text{(IV.31)}$$

Отсчет полярного угла φ в поперечном сечении пряди ведется так же, как и на рис. 54.

Кроме изгиба, прядь при свивке в канат подвергается кручению, которое обусловлено следующими обстоятельствами.

Винтовая ось пряди в канате имеет кинематическое кручение

$$\tau = -\frac{\sin\beta\cos\beta}{r_0}.$$

Это кручение связано с движением естественного трехгранника винтовой линии и, вообще говоря, не является деформацией кручения пряди. Величина τ является деформа-

цией кручения пряди только тогда, когда концы пряди при свивке в канат закреплены от вращения жестко. Эта деформация очень велика, поэтому все канатовьющие машины снабжены регулируемым или, чаще, нерегулируемым механизмом открутки прядей. Механизм открутки сообщает пряди кручение, обратное кручению винтовой линии,— один оборот на ее шаге свивки в канат:

$$\Delta = \frac{2\pi}{s_0} = \frac{\sin\beta}{r_0},$$

где

$$s_0 = \frac{2\pi r_0}{\sin\beta}$$

суть длина пряди на ее шаге свивки.

Таким образом, остаточная деформация кручения

$$\theta_{техн} = \tau - \Delta = \frac{1 - \cos\beta}{r_0}\sin\beta. \qquad (IV.32)$$

В общем случае для регулируемого механизма подкрутки прядей можно записать:

$$\Delta = k\frac{\sin\beta}{r_0},$$

где k — коэффициент настройки механизма подкрутки.

Тогда в общем случае получим

$$\theta_{техн} = \frac{k - \cos\beta}{r_0}\sin\beta. \qquad (IV.33)$$

Так как технологическое натяжение пряди в последующем исчезает, то это кручение можно считать свободным, при котором прядь получает осевую деформацию (II. 46):

$$\varepsilon_{техн} = -\frac{c_0}{a_0}\theta_{техн}. \qquad (IV.34)$$

Пользуясь далее формулами (II. 34), можно определить все технологические деформации в проволоках от кручения пряди. В частности, для осевого удлинения проволок получаем такое выражение:

$$(\varepsilon_s)_{техн} = \left(r\sin\alpha\cos\alpha - \frac{c_0}{a_0}\cos^2\alpha\right)\theta_{техн}. \qquad (IV.35)$$

Дополнительная изгибная деформация запишется так:

$$\tilde{b}^{\pi}_{техн} = \left[1 + \cos^2\alpha + \frac{c_0}{a_0} - \frac{\sin 2\alpha}{2r}\right]\frac{\sin 2\alpha}{2}\theta_{техн}. \qquad (IV.36)$$

Полная изгибная деформация относительно оси b проволоки запишется в виде суммы выражений (IV. 30) и (IV.36):

$$\tilde{b}_{\text{техн}} = \tilde{b}'_{\text{техн}} + \tilde{b}''_{\text{техн}}. \qquad \text{(IV. 37)}$$

В некоторых расчетах, например при анализе геометрических условий контакта проволок с желобом шкива, кроме технологических деформаций, нас интересуют компоненты полной кривизны проволок с учетом их свивки в прядь.

При этом компонент (IV. 31) остается без изменений, а к (IV. 37) следует прибавить начальную кривизну проволоки в прямой пряди:

$$\tilde{N} = \tilde{n}_{\text{техн}}; \quad \tilde{B} = \tilde{b}_{\text{техн}} + \frac{\sin^2 \alpha}{r}. \qquad \text{(IV. 38)}$$

Полная кривизна будет

$$K = \sqrt{\tilde{N}^2 + \tilde{B}^2}. \qquad \text{(IV. 39)}$$

Для точек, выступающих на внешний круговой контур каната, угол $\varphi = 0$, и по этим формулам

$$K = \tilde{B} = \frac{\sin^2 \alpha}{r} + \frac{\sin^2 \beta}{r_0} \cos 2\alpha \cos^3 \alpha -$$

$$- \left(1 + \cos^2 \alpha + \frac{r_0}{r_0} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2r}\right)(k - \cos \beta) \frac{\sin 2\alpha}{2r_0} \sin \beta. \quad \text{(IV. 40)}$$

Аналогичная задача определения технологической полной кривизны оси проволоки в канате двойной свивки решалась Б. Д. Тиховидовым [91] посредством ее уравнения в параметрической форме. Этот метод возражений в принципе не вызывает, однако приводит к весьма громоздким выражениям по сравнению с нашими формулами, не давая заметного выигрыша в точности.

Для сравнения в табл. 38 даны расчеты полных относительных удлинений в крайних волокнах проволок при $\varphi = 0$, как

$$\varepsilon_{\text{техн}} = K \frac{\delta}{2} \; (k = 1)$$

для двух канатов $6 \times 19 + \text{о. с.}$ и $6 \times 37 + \text{о. с.}$ при различных вариантах свивки. Заметной разницы в расчетах Б. Д. Тиховидова и по формуле (IV. 40) не обнаружи-

Таблица 38

Расчет полных относительных удлинений в крайних волокнах проволок

Конструкция пряди и каната	β	r_0, мм	№ слоя проволок в пряди	α	r_i, мм	ε при $\varepsilon = 0$, $k = 1{,}0$ мм	
						по В. Д. Тихонову	по формуле (IV. 46)
Крестовая свивка							
$1 + 6 + 12$ $6 \times 19 + о.\ с.$	16°40′	5	1	11°50′	1	0,0075	0,0074
			2	12°50′	2	0,0073	0,0071
$1 + 6 + 12 + 18$ $6 \times 37 + о.\ с.$	16°40′	7	1	11°50′	1	0,0057	0,0053
			2	12°50′	2	0,0053	0,0051
			3	12°40′	3	0,0053	0,0050
Односторонняя свивка							
$1 + 6 + 12$ $6 \times 19 + о.\ с.$	16°10′	5	1	14°40′	1	0,0057	0,0059
			2	15°40′	2	0,0055	0,0057
$1 + 6 + 12 + 18$ $6 \times 37 + о.\ с.$	16°10′	7	1	14°40′	1	0,0045	0,0043
			2	15°40′	2	0,0038	0,0040
			3	15°10′	3	0,0038	0,0040

вается, что подтверждает теоретическую правильность обоих решений.

Технологические изгибные деформации проволок еще не определяют технологических напряжений в канате. Это обусловлено, с одной стороны, тем, что данные напряжения находятся далеко за пределом упругости материала проволок. С другой стороны, получившее широкое распространение применение предварительной винтовой деформации прядей в целях уменьшения упругой отдачи каната существенно изменяет упруго-пластическое напряженное состояние проволок.

Заслуживают внимания осевое удлинение проволок (IV. 35) и связанные с ним нормальные напряжения

$$\sigma_{\text{техн}} = E\,(\varepsilon_x)_{\text{техн}}.$$

На рис. 55 показаны эпюры этих напряжений для пряди $1 + 6 + 12 + 18$ типа 6 из табл. 14 при нерегулируемой открутке ($k = 1$) и при $\beta = 16°$.

Напряжения вычислены при различных направлениях свивки слоев проволок, т. е. при различной степени уравновешенности пряди. Свивка каната по верхнему слою проволок — крестовая. При односторонней свивке каната эти напряжения просто изменяют знак на обратный. Опасными при работе каната являются только растягивающие напряжения, поэтому отрицательные сжимающие напряжения во внимание можно не принимать.

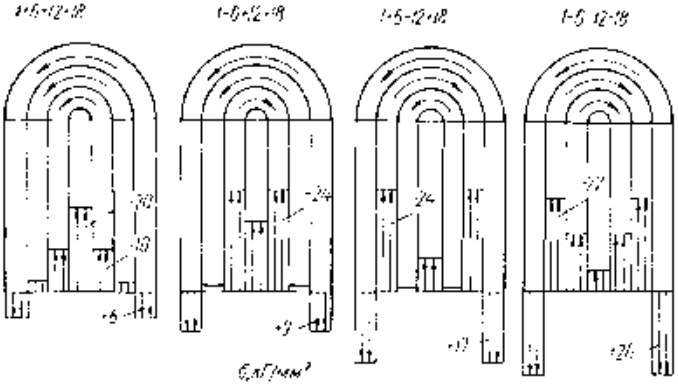


Рис. 55. Эпюры технологических осевых напряжений в трехслойных прядях типа 1 × 37 при различных вариантах свивки.

Для крестовой свивки растягивающие напряжения возникают в наружных проволоках, причем по мере увеличения степени уравновешенности пряди они возрастают, достигая в уравновешенной пряди 1 — 6 — 12 + 18 величины 20 $кГ/мм^2$ и представляя уже существенную прибавку к рабочим напряжениям. Для обычной пряди с односторонней свивкой всех проволок растягивающие напряжения будут порядка 6 $кГ/мм^2$ и при работе каната могут быть незаметны.

Большие сжимающие напряжения во внутренних слоях проволок могут вызвать большие нарушения структуры прядей как в процессе изготовления, так и при эксплуатации каната. В результате сжатия внутренние слои проволок теряют устойчивость и, раздвинув наружный слой, выходят наружу. Это явление потери устойчивости сжатых внутренних слоев проволок почти неизбежно при свивке каната с уравновешенными многослойными прядями.

Если же какими-либо методами этого удается избежать при свивке каната, то потеря устойчивости и выпучивания внутренних слоев проволок почти неизбежно происходит при работе каната. Поэтому свивку канатов вообще, а с уравновешенными прядями обязательно, следует производить при такой настройке канатовьющей машины, при которой прядь не испытывает деформации кручения. Это возможно только при коэффициенте настройки открутки прядей

$$k = \cos\beta, \qquad (IV.41)$$

что, к сожалению, возможно только на канатовьющих машинах с регулируемым механизмом подкрутки прядей.

На Одесском канатном заводе автором было проведено исследование явления нарушения структуры прядей с переменным направлением свивки проволок. Применение так называемой «нулевой» подкрутки прядей ($\theta_{\text{техн}} = 0$) полностью исключило это явление при изготовлении и работе канатов.

При односторонней свивке каната по наружным проволокам знак напряжений изменяется на обратный: внутренние слои проволок испытывают растяжение, наружные — сжатие. Сжатие наружных проволок сопровождается потерей их устойчивости и расслоением прядей, что и наблюдается на практике. Поэтому качественное изготовление канатов односторонней свивки возможно только на машинах с регулируемым механизмом подкрутки прядей, что хорошо известно технологам.

§ 30
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ МОМЕНТ УПРУГОЙ ОТДАЧИ В КАНАТЕ

Процесс свивки каната представляет собой холодную упруго-пластическую деформацию проволок и прядей, поэтому в нем сохраняются начальные напряжения свивки. Эти напряжения проявляются в виде момента упругой отдачи каната, вызывающего его раскручивание. Детальное теоретическое исследование моментов упругой отдачи в канатах впервые выполнено в работах В. Н. Чарушина [96]. Следуя этой методике, мы дадим краткое изложение основных полученных результатов.

Технологический крутящий момент в пряди состоит из двух составляющих

$$L_t = L_t' + L_t'',$$

где L_t' — момент от скручивания пряди при ее свивке в канат;

L_t'' — оставшийся момент упругой отдачи от предшествовавшей свивки проволок в прядь.

При этом

$$L_t' = H\theta_{\text{техн}},$$

где H — крутильная жесткость пряди, определяемая согласно (II. 45).

Изгибающий момент в пряди равен произведению ее изгибной жесткости g на кривизну K из (IV. 29):

$$L_b = gK.$$

Вследствие изгиба пряди по винтовой линии в ней возникает поперечная сила

$$P_b = KL_t - \tau L_n,$$

которая получается из выражения (II. 8) при

$$\omega_j = K; \quad \omega_i = \tau.$$

Пользуясь вторым уравнением из (II. 3), находим крутящий момент в канате от свивки данной пряди:

$$L_x = L_3 \sin\beta - L_t \cos\beta + r_0 (P_t \sin\beta - P_b \cos\beta). \quad \text{(IV. 42)}$$

Силу P_t можно приравнять к технологическому натяжению данной пряди, обозначив ее P_0.

Тогда, принимая во внимание все предыдущие выражения, после преобразований получим

$$L_x = g\,\frac{1+\cos^2\beta}{r_0}\sin^3\beta + r_0 P_0 \sin\beta + \\ + (H\theta_{\text{техн}} + L_t'')\cos^3\beta. \quad \text{(IV. 43)}$$

Для спирального каната следует положить

$$\beta = \alpha; \quad r_0 = r; \quad H = GI_p; \quad g = EI; \quad L_t'' = 0.$$

Тогда, беря $\theta_{\text{техн}}$ из (IV. 33), получим

$$L_x' = EI\,\frac{1+\cos^2\alpha}{r}\sin^3\alpha + rP_0 \sin\alpha + \\ + GI_p\,\frac{k-\cos\alpha}{r}\cos^3\alpha\sin\alpha. \quad \text{(IV. 44)}$$

Момент упругой отдачи в канате равен сумме моментов по всем его элементам, взятых с обратным знаком:

$$M_{техн} = -\sum_i (L_\alpha)_i. \qquad \text{(IV. 45)}$$

Таким образом, для спирального каната

$$M'_{техн} = -\sum \left[EI \frac{1 + \cos^2 \alpha}{r} \sin^3 \alpha + rP_0 \sin \alpha + \right.$$

$$\left. + GI_p \frac{k - \cos \alpha}{r} \cos^3 \alpha \sin \alpha \right]. \qquad \text{(IV. 46)}$$

Этот момент в прядях каната двойной свивки выступает как момент

$$L_i^n = -M_{техн}.$$

Тогда для каната двойной свивки можно записать:

$$M_{техн} = -\sum \left[g \frac{1 + \cos^2 \beta}{r_0} \sin^3 \beta + \right.$$

$$+ r_0 P_0 \sin \beta + L_i^n \cos^3 \beta +$$

$$\left. + H \frac{k - \cos \beta}{r_0} \cos^3 \beta \sin \beta \right]. \qquad \text{(IV. 47)}$$

При вычислении этих моментов следует также учитывать направления свивки проволок и прядей по слоям в знаках их углов α и β.

Коэффициент жесткости EI и GI_p проволоки вследствие наличия зоны пластической деформации несколько уменьшаются по сравнению с ее упругим состоянием. При этом опыт показывает, что можно ограничиться лишь поправкой к изгибной жесткости проволоки, беря в расчет

$$EI' = \xi EI.$$

Поправочный коэффициент ξ на упруго-пластическую деформацию можно взять по Стефану [112]

$$\xi = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin y + \frac{5}{3} y \sqrt{1 - y^2} \left(1 + \frac{2}{5} y^2 \right) \right], \quad \text{(IV. 48)}$$

где

$$y = \frac{\sigma_T}{\sigma_{упр}};$$

σ_T — предел текучести материала проволок; для канатной проволоки составляет примерно 80 — 85% от предела прочности;

$\sigma_{упр}$ — максимальные напряжения в идеально упругой проволоке;

$$\sigma_{упр} = \delta E \frac{\sin^2 \alpha}{2r}.$$

Свивочным натяжением проволок P_0 в формуле (IV. 46) в практических расчетах можно пренебречь. При этом хорошо подтверждают формулу (IV. 46) опыты В. Н. Чаругина [96].

При изготовлении каната с предварительной деформацией прядей (нераскручивающихся) изгибающий момент в пряди практически уничтожается, и поэтому в формуле (IV. 47) первый член следует просто отбросить. Пренебрегая также влиянием технологического натяжения, для однослойного каната двойной свивки, свиваемого с предварительной деформацией прядей, получим

$$M_{техн} = -mL_t^{\prime\prime} \cos^3 \beta - mH \frac{k - \cos \beta}{r_0} \cos^3 \beta \sin \beta, \quad (IV. 49)$$

где m — число прядей.

Таким образом, свитый с предварительной деформацией прядей канат сохраняет некоторый момент упругой отдачи, связанный со свивкой проволок в прядь и подкруткой прядей.

В канате крестовой свивки момент $L_t^{\prime\prime}$ в (IV. 49) изменяет знак на обратный, что в общем уменьшает упругую отдачу каната.

При односторонней свивке каната оба члена в формуле (IV. 49) складываются. Поэтому канат односторонней свивки, свитый с предварительной деформацией прядей, продолжает сохранять в себе значительно больший момент упругой отдачи, чем канат крестовой свивки. В этом состоит основная трудность получения нераскручивающихся канатов односторонней свивки.

Задача качественного изготовления нераскручивающихся канатов односторонней свивки, таким образом, сводится к необходимости ликвидации момента упругой отдачи (IV. 49). Второй член в формуле (IV.49) можно ликвидировать соответствующим выбором коэффициента k настройки механизма подкрутки прядей, т. е. применить так называемую «нулевую» подкрутку прядей. Момент $L_t^{\prime\prime}$ можно ликвидировать двумя путями.

С одной стороны, можно идти по пути изготовления нераскручивающихся прядей, применив предварительную деформацию проволок или рихтовку готовых прядей. С другой стороны, в прядях ТК или ТЛК можно применить переменное направление свивки слоев проволок, что значительно уравновесит технологический момент отдачи пряди.

Опыт Одесского канатного завода показывает, что оба мероприятия дают положительный эффект при изготовлении канатов односторонней свивки, но более технологичной следует считать рихтовку прядей.

ГЛАВА 5

СТАТИКА ИЗОГНУТОГО КАНАТА

§ 31

ВНУТРЕННИЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ

В теории изгиба воспользуемся теми же предпосылками, что и для прямого каната (см. гл. II). Однако изгиб представляет собой несосесимметричную деформацию, поэтому проволоки или пряди, находящиеся в одном слое и геометрически равноправные в прямом канате, при его изгибе неравноправны в силовом отношении. В связи с этим, обращаясь к рис. 22, нет оснований утверждать, что силы тангенциального давления P_1 и P_2 одинаковы. Если это так, то их разность приводит к возникновению тангенциальной нагрузки f_b на винтовой элемент каната. Остальные контактные силы, как и в прямом канате, сводятся к нормальной нагрузке f_n.

Следовательно, уравнения Кирхгофа (I. 58) и (I. 59) для винтового элемента изогнутого каната в отличие от выражений (II. 1) и (II. 2) запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_n}{ds} + \omega_t P_b - \omega_b P_t = -f_n;\\
&\frac{dP_b}{ds} + \omega_n P_t - \omega_t P_n = -f_b;\\
&\frac{dP_t}{ds} + \omega_b P_n - \omega_n P_b = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (V.\ 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL_n}{ds} + \omega_t L_b - \omega_b L_t = -P_b;\\
&\frac{dL_b}{ds} + \omega_n L_t - \omega_t L_n = P_n;\\
&\frac{dL_t}{ds} + \omega_t L_n - \omega_n L_t = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (V.\ 2)$$

От производной по дуге s можно перейти к дифференцированию по полярному углу φ согласно (I.78)

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{d\varphi} \cdot \frac{\sin\alpha}{r}.$$

Для простоты расчетов ограничимся вначале рассмотрением лишь однослойного каната, состоящего из круглых проволок или прядей с линейным нормальным контактом.

Проволоки или пряди в канате не всегда свиваются с плотным тангенциальным контактом. Однако при изгибе каната в области его вогнутости зазор между ними выбирается, и возникает область тангенциального контакта (рис. 56). Этот контакт возникает по линиям s_k, ограниченным точками 1 и 2, которые в поперечном сечении каната охватываются дугой контакта 2α.

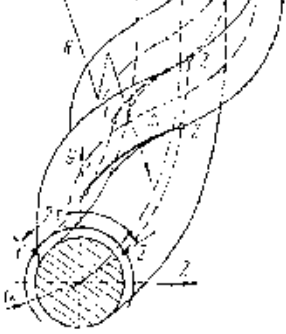


Рис. 56. Схема тангенциального контакта со стороны вогнутости каната.

В плотно свитом канате со слабым сердечником тангенциальный контакт может охватывать все сечение каната. Вне области тангенциального контакта сила $f_b = 0$.

Коэффициенты уравнений статики ω_n, ω_b и ω_t определены в предыдущей главе в форме (IV.1) с неизвестным углом $\eta(\varphi)$. В данном случае удобнее рассматривать канат со стороны его вогнутости (рис. 56), что изменяет в этих выражениях только знак кривизны $1/R$. В результате они перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \omega_b &= -\frac{\cos^2\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\sin^2\alpha}{r} + \frac{\sin 2\alpha}{r}\eta(\varphi); \\ \omega_n &= \frac{\cos\alpha}{R}\sin\varphi - \frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}; \\ \omega_t &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r} + \frac{\cos 2\alpha}{r}\eta(\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (V.3)$$

Функцию $\eta(\varphi)$, определенную в кинематической теории изгиба из упрощенных предпосылок, здесь будем считать неизвестной. Тогда в шести уравнениях статики (V.1) и

(V.2) получим в общей сложности девять неизвестных: три силы, три момента, нагрузки f_a и f_b и функцию $\eta(\varphi)$.

Задача, таким образом, оказывается многократно статически неопределимой. Кроме того, будем рассматривать большой изгиб каната, когда принцип линейной суперпозиции неприменим. Обычно в линейной теории упругости и строительной механике ограничиваются малыми перемещениями, когда изменением начальной ориентации сил в процессе деформации системы можно пренебречь. Изгиб каната на блоках и барабанах относится к большим перемещениям, несравнимым с теми, которые рассматриваются в теории изгиба, например, балок. Действительно, в теории малых перемещений мы могли бы взять только начальные значения коэффициентов (V.3), как в прямом канате, т. е. приняв

$$\omega_b^0 = \frac{\sin^2\alpha}{r};\ \omega_n^0 = 0;\ \omega_t^0 = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}. \qquad (V.4)$$

Однако такая классическая линейная постановка задачи не раскрывает всего механизма изгиба каната и поэтому не представляет особого практического интереса по следующим соображениям. Отбросив функцию $\eta(\varphi)$, рассмотрим отношение максимального значения первого члена в коэффициенте ω_b из (V.3) к его значению из (V.4):

$$\xi = \frac{R}{\cos^2\alpha} \Big/ \frac{\sin^2\alpha}{r} = \frac{r}{R}\operatorname{ctg}^2\alpha. \qquad (V.5)$$

При обычных углах свивки $\alpha = 14 \div 18°$, $\operatorname{ctg}^2\alpha = 16 \div 10$, а отношение $\frac{R}{r}$ имеет порядок отношения $\frac{D}{d}$, которое колеблется в крановых механизмах в пределах от 16 до 30—40, а в отдельных специальных случаях снижается даже до 10—12.

Поэтому в данной области отношений D/d величина (V.5) близка к единице, и влиянием первого члена в коэффициенте ω_b из (V.3) нельзя пренебречь по сравнению со вторым.

Кроме того, в теории малых смещений вообще исчезает из поля зрения компонент деформации ω_n, играющий решающую роль в силовом взаимодействии элементов каната в области тангенциального контакта.

Наряду с этим, с практической точки зрения нас мало интересует простой изгиб свободного отрезка каната. Канат набегает на блок или барабаны с большим натяжением,

поэтому в технике мы имеем дело с изгибом предварительно напряженного каната. При переходе же системы с одного напряженного состояния в другое, который сопровождается большими смещениями, принцип независимости действия сил неприменим, поэтому мы должны рассматривать совместное действие растяжения каната с последующим его изгибом. Таким образом, задача сводится к рассмотрению большого изгиба предварительно напряженного прямого каната.

В прямом канате внутренние силы в проволоке сводятся к четырем факторам (II.9) и (II.10), которые обозначим как начальные силы так:

$$P_t^0,\ P_b^0,\ L_t^0,\ L_b^0. \tag{V.6}$$

В изогнутом канате к этим силам прибавляются дополнительные переменные составляющие, вызванные изгибом каната. Поэтому результатирующие внутренние силовые факторы в проволоке в изогнутом канате могут быть представлены в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} &P_t = P_t^0 + \tilde{P}_t; \quad L_t = L_t^0 + \tilde{L}_t; \\ &P_b = P_b^0 + \tilde{P}_b; \quad L_b = L_b^0 + \tilde{L}_b; \\ &P_n = P_n. \qquad\qquad L_n = L_n. \end{aligned}\right\} \tag{V.7}$$

При этом силы первого состояния (V.6) удовлетворяют уравнениям статики в форме (II.1) и (II.2), т. е. при

$$f_b = 0;\ \frac{t}{R} = 0;\ \eta(\varphi) = 0.$$

Силы второго состояния (V.7) удовлетворяют уравнениям статики в форме (V.1) и (V.2). Ввиду различия коэффициентов систем (V.3) и (V.4) силы первого состояния (V.6), удовлетворяя уравнениям (II.1) и (II.2), в уравнениях второго состояния (V.1) и (V.2) полностью не сокращаются. В этом формально выражается влияние начального напряженного состояния прямого каната на его последующий большой изгиб.

Изгибные деформации проволок по теории кинематической аналогии выражаются через коэффициенты (V.3) и (V.4) как разности кривизны следующим образом:

$$\tilde{b} = \omega_b - \omega_b^0;\ \tilde{n} = \omega_n - \omega_n^0. \tag{V.8}$$

Отсюда можно выразить изгибающие моменты в проволоке, вызванные этими деформациями, так:

$$\tilde{L}_b = EI\tilde{b}; \quad \tilde{L}_n = EI\tilde{n}. \tag{V.9}$$

Этим самым два неизвестных момента выражаются через одну неизвестную функцию $\eta(\varphi)$ и число неизвестных сокращается таким образом до семи при шести уравнениях статики.

Далее посредством уравнений статики (V.1) и (V.2) можно выразить все неизвестные через одну функцию $\eta(\varphi)$. В общем это приводит к нелинейным уравнениям относительно данной функции. Поэтому представляется целесообразным упростить дальнейшее решение следующим образом.

Из всех начальных сил в прямом канате решающее значение имеет только осевое натяжение в проволоке P_t^0. Влияние остальных факторов, как показывают расчеты, кроме познавательного интереса, практического значения не имеет. Поэтому из начального напряженного состояния прямого каната в расчете оставим только натяжение P_t^0.

Изгиб каната сопровождается большими изгибными деформациями проволоки, и поэтому изгибающими моментами и поперечными силами во втором состоянии пренебречь нельзя. Кроме того, так как величины $1/R$ и $\eta(\varphi)$ есть малые одного порядка, то будем искать решение в линейной форме относительно этих величин, пренебрегая их произведениями и степенями выше первой.

В уравнениях (V.2) это приводит к следующим выражениям:

$$\tilde{L}_t = EI\left[\frac{\cos\alpha}{R}\cos\varphi + \frac{\sin\alpha}{r}\eta(\varphi)\right]\sin\alpha; \tag{V.10}$$

$$\tilde{P}_n = 3EI\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{r^2}\cdot\frac{d\eta}{d\varphi}; \tag{V.11}$$

$$\tilde{P}_b = EI\left[\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} - (3\cos^2\alpha - 1)\,\eta(\varphi)\right]\frac{\sin^2\alpha}{r^2}. \tag{V.12}$$

Так как начальное натяжение в проволоке P_t^0 есть величина постоянная, то переменной составляющей в P_t будет величина $\tilde{P}_t$ того же порядка малости, что и $1/R$.

Рассмотрим после этого второе уравнение из системы (V.1), которое запишется в такой форме:

$$\tilde{L}_b = \omega_t\tilde{P}_n - \omega_n P_t - \frac{d\tilde{P}_b}{ds}. \tag{V.13}$$

Подстановка сюда силы $P_t = P_t^0 + \tilde{P}_t$ приводит к произведению $\omega_n \tilde{P}_t$, являющемуся величиной второго порядка малости. Поэтому в линейном представлении сила $\tilde{P}_t$ в этом уравнении не участвует.

В результате после подстановки выражений для поперечных сил из (V.11) и (V.12) уравнение (V.13) с точностью до малых первого порядка перепишется так:

$$\frac{d^3\eta}{d\varphi^3} - k^2 \frac{d\eta}{d\varphi} = -a_1 \sin\varphi - a_2 f_b(\varphi), \qquad (V.14)$$

где

$$a_1 = P_t^0 \frac{r^3 \cos\alpha}{REI \sin^3\alpha}; \quad a_2 = \frac{r^3}{EI \sin^3\alpha};$$

$$k^2 = \frac{r^2 P^0}{EI \sin^2\alpha} + 6\cos^2\alpha - 1.$$

Это уравнение содержит две неизвестные функции, и роль уравнений статики на этом исчерпывается.

§ 32

ИЗГИБ НЕСОМКНУТОГО КАНАТА

В том случае, когда канат свит с достаточными зазорами между проволоками или прядями, до определенного изгиба тангенциальный контакт между его элементами со стороны вогнутости может еще не возникнуть. Такое состояние каната будем называть несомкнутым. При этом сила $f_b = 0$, и выражение (V.14) превращается в дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\eta(\varphi)$ следующего вида:

$$\frac{d^3\eta}{d\varphi^3} - k^2 \frac{d\eta}{d\varphi} = -a_1 \sin\varphi. \qquad (V.15)$$

Задача таким образом получается статически определимой. Так как мы рассматриваем равномерный изгиб каната по окружности, то на каждом шаге свивки картина его деформаций повторяется. Поэтому следует искать периодическое решение уравнения (V.15) с периодом, равным 2π. Общий интеграл уравнения (V.15) запишется так:

$$\eta = C_1 e^{k\varphi} + C_2 e^{-k\varphi} - \frac{r}{R} A \cos\varphi + C_3, \qquad (V.16)$$

где

$$A = \frac{r^2 P_t^0 \operatorname{ctg} \alpha}{r^2 P_t^0 + GEI \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}. \qquad (V.17)$$

В уравнении (V.16) C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Периодическое решение удовлетворяют только вторые два члена, поэтому следует положить $C_1 = C_2 = 0$ и принять

$$\eta = -A \cos \varphi + C_3. \qquad (V.18)$$

В пределе, когда натяжение P_t^0 очень велико по сравнению с гибкостью элемента каната,

$$\lim_{P_t^0 \to \infty} \eta = \eta_{lim} = -\frac{r}{R} \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi + C_3. \qquad (V.19)$$

Рассмотрим при этом компоненты кривизны проволоки ω_b и ω_n, определяемые выражениями (V.3). Ось верхней проволоки в изогнутом по окружности спиральном канате (рис. 57) можно рассматривать как некоторую линию на поверхности тора. Тогда ω_b является нормальной кривизной этой линии в плоскости (n, t) или кривизной нормального сечения поверхности тора в этом направлении. Величина ω_n является кривой в плоскости (b, t), касательной к поверхности тора, и называется геодезической кривизной кривой на поверхности.

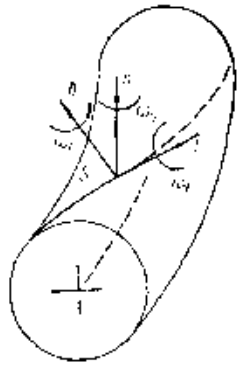


Рис. 57. Схема угловых скоростей трехгранника b, n, t.

Пользуясь предельным выражением (V.19), убеждаемся, что при этом значении $\eta(\varphi)$ геодезическая кривизна обращается в нуль:

$$\omega_n = 0. \qquad (V.20)$$

Линия на поверхности, геодезическая кривизна которой равна нулю, называется геодезической и является кратчайшей линией между двумя точками на данной поверхности [94]. Таким образом, в достаточно натянутом несомкнутом канате проволоки (или пряди) при его изгибе стремятся занять положение геодезических линий на поверхности тора.

Поскольку

$$A < \frac{r}{R} \operatorname{ctg} \alpha,$$

то изгибная жесткость проволок несколько препятствует их смещению в положение геодезических линий.

Сравним полученное решение со значением η, принятым в кинематической теории изгиба каната (IV.4). Так как здесь мы рассматриваем канат со стороны его вогнутости, то в этом выражении знак кривизны каната следует изменить на обратный и записать его так:

$$\eta = \frac{r}{R} \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi. \qquad (V.21)$$

Сравнивая это выражение с формулами (V.18) или (V.19), видим, что они противоречат друг другу как по величине, так и по знаку смещений. Следовательно, принятая теория кинематической аналогии противоречит статической теории изгиба несомкнутого каната.

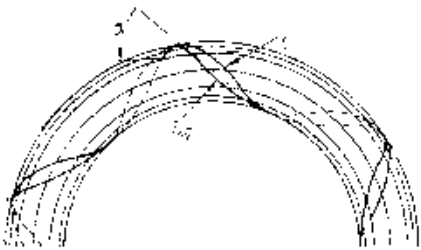


Рис. 58. Течение геодезических линий на поверхности тора.

На рис. 58 показаны течения линий, определяемых выражениями (V.19) и (V.21). В области вогнутости каната, где $\cos \varphi > 0$, геодезическая линия $s_{\text{гд}}$ уменьшает угол наклона к параллелям тора, а со стороны выпуклости, наоборот, увеличивает, т. е. выпуклую часть каната она стремится пройти быстрее и в большей своей части расположиться со стороны его вогнутости. Линия оси s проволоки, описываемая формулой (V.21), имеет обратное течение: уменьшает угол наклона к параллелям на выпуклой стороне каната и увеличивает на вогнутой.

Такое течение геодезических линий противоречит геометрическому представлению об образовании изогнутой формы каната. Со стороны вогнутости канат укорачивается, что возможно при увеличении углов свивки, а со стороны выпуклости удлинение каната должно сопровождаться их увеличением. Геодезическая линия, как видим, дает обратную картину.

Таким образом, в случае изгиба несомкнутого каната разработанная выше кинематическая теория неприемлема. Поэтому вместо формулы (V.21) при определении приращения углов свивки следует пользоваться выражением (V.18) или (V.19).

Однако изгиб несомкнутого каната имеет сугубо частный характер и на нем мы детально не останавливаемся.

Для изучения изгиба сомкнутого каната одного уравнения (V.14), как видим, недостаточно, и требуется привлечение дополнительных условий, которые будем искать из условий совместности смещений тангенциально контактирующих проволок.

§ 33

ГЕОМЕТРИЯ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО КОНТАКТА

Приведенные выше рассуждения показывают, что проволоки в изгибаемом канате несвободны, а их смещения стеснены взаимным тангенциальным контактом, который накладывает определенные ограничения на их положение в пространстве.

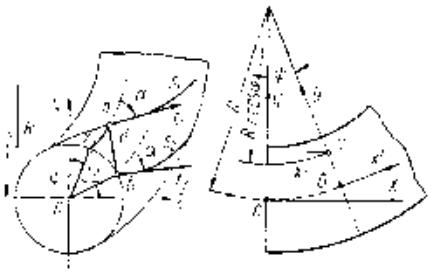


Рис. 59. Геометрия тангенциального контакта.

Очевидно, дополнительное уравнение для решения уравнений статики для сомкнутого каната следует искать из условий совместности деформаций проволок в области их тангенциального контакта. Для определения этих условий рассмотрим контакт двух круглых винтовых элементов в канате со стороны его вогнутости (рис. 59). Оси s_1 и s_2 контактирующих элементов отличаются углами свивки α и α', расстояние между ними по нормали к ним всегда равно диаметру элемента δ.

Условия тангенциального контакта запишутся в той же общей форме (I.6) и (I.8), как и для прямого каната:

$$\delta^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2; \tag{а}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 &= 0; \\ k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Радиус кривизны на уровне точки a

$$\rho = R - r\cos\varphi.$$

Расстояние x_0 превращается в дугу:

$$x_0 = \rho\psi.$$

В результате координаты точек a и b в системе координат x, y, z с точностью до малых первого порядка запишутся так:

$$x_a = \rho\sin\psi;\ y_a = r\cos\varphi + \rho(1-\cos\psi);\ z = r\sin\varphi;$$
$$x_b = 0;\ y_b = r\cos(\varphi + 2\Delta);\ z_b = r\sin(\varphi + 2\Delta).$$

Отсюда находим проекции отрезка δ:

$$\left.\begin{aligned} \delta_x &= x_a - x_b = \rho\sin\psi; \\ \delta_y &= y_a - y_b = 2r\sin\Delta\sin(\varphi + \Delta) + \rho(1-\cos\psi); \\ \delta_z &= z_a - z_b = -2r\sin\Delta\cos(\varphi - \Delta). \end{aligned}\right\} \quad (в)$$

Направляющие косинусы касательной t_2 в точке b найдем согласно табл. 1:

$$k_2' = \cos\alpha';\ l_2 = -\sin\alpha'\sin(\varphi - 2\Delta);\ m_2 = \sin\alpha'\cos(\varphi + 2\Delta).$$

Для определения направляющих косинусов касательной t_1, перенесем систему координат x, y, z параллельно оси z в поперечное сечение каната, совпадающее с точкой a.

В новых координатах x'; y'; z' направляющие косинусы касательной t_1 определяются аналогичными выражениями:

$$k_1' = \cos\alpha;\ l_1' = -\sin\alpha\sin\varphi;\ m_1' = \sin\alpha\cos\varphi.$$

Так как система координат x'; y'; z' повернута относительно x, y, z около оси z на угол ψ, то это приводит к следующим значениям направляющих косинусов в системе исходных осей:

$$k_1 = k_1'\cos\psi - l_1'\sin\psi = \cos\alpha\cos\psi + \sin\alpha\sin\varphi\sin\psi;$$
$$l_1 = l_1'\cos\psi + k_1'\sin\psi = \cos\alpha\sin\psi - \sin\alpha\sin\varphi\cos\psi;$$
$$m_1 = m_1' = \sin\alpha\cos\varphi.$$

В результате соответствующих подстановок условия контакта (а) и (б) превращаются в следующие уравнения:

$$\delta^2 = 4r^2\sin^2\Delta + 4\rho\rho'\sin^2\gamma; \quad (V.22)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha\sin 2\gamma + 2\sin^2\gamma\sin\varphi - \frac{r}{\rho}\sin 2\Delta = 0;\\ \operatorname{ctg}\alpha'\sin 2\gamma - 2\sin^2\gamma\sin(\varphi+2\Delta) - \frac{r}{\rho'}\sin 2\Delta = 0,\end{aligned}\right\} \quad (V.23)$$

где

$$\rho' = R - r\cos(\varphi + 2\Delta);\ \gamma = \frac{\psi}{2}.$$

Эти три уравнения содержат четыре неизвестных: Δ, φ и углы свивки α и α'. Однако углы свивки можно рассматривать как одну и ту же функцию с различными значениями аргумента φ, т. е.

$$\alpha = \alpha(\varphi);\ \alpha' = \alpha(\varphi + 2\Delta).$$

Таким образом, число неизвестных равно числу уравнений. Однако эта система все же не решается относительно одного из углов α или α', поэтому будем искать их разность. Чтобы избавиться от трансцендентности, учитывая малость угла ψ, полагаем

$$\sin\gamma = \gamma;\ \cos\gamma = 1.$$

Из уравнений (V.23) можно записать такую разность:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha' = -\gamma[\sin\varphi + \sin(\varphi + 2\Delta)] + \left(+\frac{r\sin 2\Delta}{2\gamma}\cdot\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right). \quad (V.24)$$

Здесь

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - \rho'}{\rho\rho'} = \frac{r\cos\varphi - r\cos(\varphi + 2\Delta)}{\rho\rho'}. \quad (г)$$

Полагая

$$\alpha = \alpha_0 + \eta(\varphi);\ \alpha' = \alpha_0 + \eta(\varphi + 2\Delta),$$

где α_0 — начальное значение угла свивки, и η — его малое приращение, разность котангенсов с точностью до малых первого порядка можно представить через разность их дифференциалов:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha' = \operatorname{ctg}\alpha_0 + \frac{d\operatorname{ctg}\alpha}{d\alpha}\eta(\varphi) - \operatorname{ctg}\alpha_0 - \frac{d\operatorname{ctg}\alpha}{d\alpha}\eta(\varphi + 2\Delta) = -\frac{\eta(\varphi) - \eta(\varphi + 2\Delta)}{\sin^2\alpha_0}. \quad (д)$$

Малость угла γ позволяет выразить его так:

$$\gamma = \frac{\psi}{2} = \frac{x_0}{2\rho}.$$

Отсюда видно, что правая часть уравнения (V.24) имеет порядок $1/\rho$. Отрезок x_0 отличается от соответствующего его значения для прямого каната из (I.11) на некоторую величину δx порядка малости $1/\rho$. Это же относится и к величине угла Δ. Малые приращения величин в правой части уравнения (V.24) приводят к членам, содержащим кривизну каната в степени, выше первой. Поэтому, ограничиваясь только линейными членами относительно кривизны каната, величины x_0 и Δ будем приравнивать их значениям для прямого каната, беря согласно (I.11)

$$x_0 = -r \operatorname{tg} \alpha_0 \sin 2\Delta.$$

После определения разности кривизны (г) с этой же точностью можно положить

$$\rho' = \rho = R.$$

В дальнейшем индекс при угле свивки α_0 опускаем, подразумевая его начальное значение.

В результате упрощений главная линейная часть уравнения (V.24) после преобразований может быть записана так:

$$\eta(\varphi) - \eta(\varphi + 2\Delta) =$$

$$= 2\frac{r}{R}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \Delta) \sin \alpha \cos \alpha \sin \Delta \sin(\varphi + \Delta). \quad (V.25)$$

Таким образом, мы получили разностное уравнение для функции $\eta(\varphi)$. Это уравнение имеет множество решений, из которых наиболее очевидным является

$$\eta = A \cos \varphi + C,$$

где A и C — неизвестные постоянные.

Путем подстановки и сравнения коэффициентов находим

$$\eta = \frac{r}{R}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \Delta\right) \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \varphi + C. \quad (e)$$

Это решение отличается от формулы (V.21), как видим, только лишь наличием второго члена в скобках, который обычно ничтожно мал по сравнению с единицей. Поэтому формулу (V.21) можно считать одним из решений разностного уравнения (V.25). Выражение в скобках

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \Delta = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \Delta$$

с большей точностью можно упростить, отбросив второй

член в правой части его преобразования. Тогда формула (V.25) запишется так:

$$\eta(\varphi) - \eta(\varphi + 2\Delta) = 2\frac{f}{R}\operatorname{tg}\alpha\sin\Delta\sin(\varphi + \Delta). \qquad (V.26)$$

Разностное уравнение (V.26) можно назвать уравнением неразрывности тангенциального контакта. Таким образом, геометрические условия неразрывности тангенциального контакта приводят лишь к разностному уравнению относительно функции $\eta(\varphi)$, сохраняя за ней некоторую произвольность. Это ясно, ибо одну из проволок можно уложить произвольно, определив этим, например, функцию $\eta(\varphi)$. Тогда вторую контактирующую с ней проволоку можно уложить только при условии, что переменная часть ее угла свивки $\eta(\varphi + 2\Delta)$ удовлетворяет это уравнение.

§ 34

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО КОНТАКТА

При наличии тангенциального контакта сила $f_b \neq 0$, задача оказывается статически неопределимой и для ее решения требуется дополнительное условие. Таким дополнительным условием может служить разностное уравнение неразрывности контакта (V.26).

Для решения задачи мы имеем два уравнения, одно из которых (V.14) — дифференциальное и (V.26) — разностное. Такая математическая интерпретация явления в виде дифференциально разностных уравнений свойственна дискретной структуре каната. Неразрывность деформаций вдоль оси элемента каната приводит к дифференциальным уравнениям, а совместность деформаций отдельных элементов в поперечном направлении, неразрывность их контакта выражаются разностными уравнениями.

Однако эти уравнения еще не дают решения задачи, они лишь позволяют от дифференциального уравнения (V.14) с помощью (V.26) перейти к разностному уравнению следующим образом. Согласно (V.14) сила $f_b(\varphi)$ линейно зависит от $\eta(\varphi)$ во всем диапазоне изменения аргумента. Поэтому, беря в этом уравнении один раз аргумент φ, а затем, вместо φ — аргумент $\varphi + 2\Delta$, вычтем полученные таким образом два уравнения одно из другого, используя для разности функций $\eta(\varphi) - \eta(\varphi + 2\Delta)$ раз-

ностное уравнение (V.26). В результате получаем новое разностное уравнение

$$f_b(\varphi) - f_b(\varphi + 2\Delta) = F(\varphi + \Delta) = A\cos(\varphi + \Delta), \qquad (V.27)$$

где

$$A = \frac{2Q}{R}\sin\Delta; \quad Q = \frac{P_t^0}{\cos\alpha} + 6EI\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{r^2}. \qquad (V.28)$$

Для решения уравнения (V.27) составим дополнительное разностное уравнение, исходя из следующих соображений. Элемент каната испытывает контактное давление $p(\varphi)$, которое действует под углом θ к оси b (см. рис. 9). Проекция этого давления на ось b создает поперечную нагрузку на элемент в плоскости (b, t):

$$W(\varphi) = p(\varphi)\cos\theta. \qquad (V.29)$$

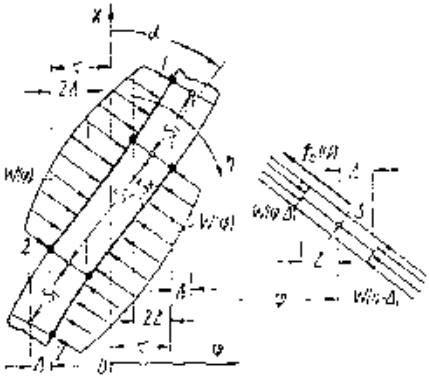


Рис. 60. Условная развертка линий тангенциального контакта.

На рис. 60 показана условная развертка на плоскость тангенциального контакта (см. рис. 56). Линии S_k тангенциального контакта, ограниченные точками 1 и 2, и эпюры поперечных нагрузок $W(\varphi)$, действующих по ним, с обеих сторон элемента равноправны и одинаковы. В точках на линиях контакта, имеющих одинаковые значения аргумента φ, т. е. расположенных на одинаковых параллелях, действуют равные давления $W(\varphi)$. Функция $W(\varphi)$ определяется в интервале

$$-\tau \leqslant \varphi \leqslant +\tau. \qquad (V.30)$$

Поперечная сила f_b создается разностью давлений на элемент слева и справа. Так как сила $f_b(\varphi)$ относится к упругой линии элемента, то давление, относящееся к данной точке упругой линии, слева имеет аргумент $\varphi - \Delta$, а справа — $\varphi + \Delta$ (рис. 60). Таким образом, получаем сле-

дующее второе разностное уравнение:

$$W(\varphi + \Delta) - W(\varphi - \Delta) = f_b(\varphi). \qquad (V.31)$$

В отличие от (V.30), интервал действия силы $f_b(\varphi)$

$$-(\tau + \Delta) \leqslant \varphi \leqslant \tau + \Delta. \qquad (V.32)$$

При переносе эпюр давлений $W(\varphi)$ с обеих сторон на ось элемента по линии их действия они оказываются сдвинутыми друг относительно друга по аргументу на величину 2Δ, а так как функция $W(\varphi)$ действует в ограниченном интервале, то образуется средний участок с двухсторонним давлением, на котором

$$\left.\begin{aligned} f_b(\varphi) &= W(\varphi + \Delta) - W(\varphi - \Delta); \\ -(\tau - \Delta) &\leqslant \varphi \leqslant (\tau - \Delta). \end{aligned}\right\} \qquad (V.33)$$

По краям интервала (V.32) своего действия силы $f_b(\varphi)$ образуют участки с односторонним давлением. При этом справа $W(\varphi + \Delta) = 0$ и уравнение (V.31) принимает вид

$$f_b(\varphi) = -W(\varphi - \Delta); \quad (\tau - \Delta < \varphi \leqslant \tau + \Delta). \qquad (V.34)$$

Соответственно слева $W(\varphi - \Delta) = 0$ и согласно (V.31)

$$f_b(\varphi) = W(\varphi + \Delta); \quad [-(\tau + \Delta) \leqslant \varphi < -(\tau - \Delta)]. \qquad (V.35)$$

Таким образом, получаем систему двух разностных уравнений (V.27) и (V.31) с краевыми условиями (V.34) и (V.35). Решение этой системы в общем виде может быть построено следующим образом.

Полученные разностные уравнения допускают сдвиги аргументов на $\pm i\Delta$ ($i = 1, 2, 3 \ldots$) в пределах интервала существования функций. Это позволяет записать уравнения (V.27) и (V.31) в таком общем виде:

$$\left.\begin{aligned} f_b(\varphi \pm i\Delta) - f_b[\varphi + (2 \pm i)\Delta] &= F[\varphi + (1 \pm i)\Delta]; \\ f_b(\varphi \pm i\Delta) = W[\varphi + (1 \pm i)\Delta] &- W[\varphi - (1 \mp i)\Delta]. \end{aligned}\right\} \qquad (V.36)$$

Каждому значению i соответствует отдельное тождество. Пользуясь этими тождествами, каждую функцию с аргументом φ можно выразить через ее значение при любом аргументе $\varphi \pm i\Delta$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} f_b(\varphi) &= f_b(\varphi \pm 2i\Delta) \pm \sum_{k=0}^{i-1} F[\varphi \pm (2k + 1)\Delta]; \\ W(\varphi) &= W(\varphi \pm 2i\Delta) \mp \sum_{k=0}^{i-1} f_b[\varphi \pm (2k + 1)\Delta]. \end{aligned}\right\} \qquad (V.37)$$

Эти выражения можно рассматривать как продолжающие уравнения для искомых функций. Так как функция (V.28) известна, то, пользуясь известными таблицами [81], легко находим сумму из первого уравнения:

$$\sum_{k=0}^{i-1} F[\varphi \pm (2k+1)\Delta] = A \sum_{k=0}^{i-1} \cos[\varphi \pm (2k+1)\Delta] =$$
$$= A\rho_i \cos(\varphi \pm i\Delta); \quad \rho_i = \frac{\sin i\Delta}{\sin \Delta}. \qquad (V.38)$$

Тогда первое продолжающее уравнение из (V.37) перепишется так:

$$f_b(\varphi) = f_b(\varphi \pm 2i\Delta) \pm A\rho_i \cos(\varphi \pm i\Delta). \qquad (V.39)$$

С помощью этого уравнения находим сумму во втором продолжающем уравнении:

$$W(\varphi) = W(\varphi \pm 2i\Delta) \mp i f_b(\varphi \pm \Delta) +$$
$$+ A(C_i \cos\varphi \mp S_i \sin\varphi), \qquad (V.40)$$

где

$$C_i = \frac{\sin^2 i\Delta}{2\sin^2 \Delta} - \frac{i}{2}; \quad S_i = \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\Delta - \frac{\sin 2i\Delta}{4\sin^2 \Delta}.$$

Здесь и в дальнейшем при нахождении сумм тригонометрических функций вида (V.38) используются таблицы [81] и их преобразования. Каждому из уравнений (V.39) и (V.40) в такой сокращенной записи соответствуют два уравнения: одно при верхнем, другое при нижнем знаке в их правых частях. Беря один раз уравнение (V.40) при верхнем знаке, сдвинув аргумент на $-\Delta$, а второй раз при нижнем знаке, сдвинув аргумент на $+\Delta$, после подстановки полученных результатов в уравнение (V.33) и соответствующих преобразований находим:

$$(2i-1) f_b(\varphi) = -2A\sigma_i \sin\varphi + W[\varphi + (2i-1)\Delta] -$$
$$- W[\varphi - (2i-1)\Delta], \qquad (V.41)$$

где обозначено

$$\sigma_i = \frac{i-1}{2\sin\Delta} - \frac{\cos i\Delta \sin(i-1)\Delta}{2\sin^2 \Delta}. \qquad (V.42)$$

Учитывая, что согласно (V.27)

$$f_b(\varphi - \Delta) - f_b(\varphi + \Delta) = F(\varphi), \qquad (V.43)$$

сложим уравнения (V.40) при верхнем и нижнем знаках в правой части. В результате получим:

$$2W(\varphi) = A(2C_i - i)\cos\varphi + W(\varphi + 2i\Delta) + \\ + W(\varphi - 2i\Delta). \qquad (V.44)$$

Взяв аналогичным образом разность этих уравнений, найдем:

$$i[f_b(\varphi + \Delta) + f_b(\varphi - \Delta)] = -2AS_i\sin\varphi + \\ + W(\varphi + 2i\Delta) - W(\varphi - 2i\Delta). \qquad (V.45)$$

Далее следует воспользоваться краевыми условиями (V.34) и (V.35), для чего, выбрав аргумент φ внутри срединного интервала (V.33), соответствующим его сдвигом продолжить полученные уравнения на краевые интервалы. Для этого представим угол контакта следующим образом:

$$\tau = m\Delta + \varepsilon; \quad m = 0, 1, 2, 3 \ldots; \quad 0 < \varepsilon \leqslant \Delta. \qquad (V.46)$$

Обратимся к формуле (V.41) и выберем число $i = n$ так, чтобы аргументы функций W удовлетворяли таким неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi + (2n-1)\Delta > \tau; \\ &2\Delta - \tau > \varphi - (2n-1)\Delta > -\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (V.47)$$

откуда следует

$$n = \frac{m}{2} + 1; \quad m = 2(n-1); \; 0 < \varphi \leqslant \Delta + \varepsilon, \qquad (V.48)$$

что возможно для целых n при четных m.

При этом первый аргумент в формуле (V.41) выходит за пределы (V.30) существования функции W, т. е.

$$W[\varphi + (2n-1)\Delta] = 0.$$

Второй аргумент остается на левом краевом интервале (V.35), причем можно записать

$$W[\varphi - (2n-1)\Delta] = f_b(\varphi - 2n\Delta). \qquad (V.49)$$

Тогда, выразив в (V.49) функцию $f_b(\varphi - 2n\Delta)$ посредством (V.30) при $i = n$ через $f_b(\varphi)$, найдем следующее решение для уравнения (V.41):

$$f_b(\varphi) = -\frac{A}{2n}\sigma_n\cos(\varphi - n\Delta) - \frac{A}{n}\sigma_n\sin\varphi. \qquad (V.50)$$

Для нечетных чисел m в (V.46) следует воспользоваться уравнением (V.45). Аргумент функций W в этом уравнении при $i = n$ выбираем в пределах неравенств

$$\left.\begin{aligned} &\varphi + 2n\Delta > \tau; \\ &2\Delta + \tau > \varphi - 2n\Delta > -\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (V.51)$$

которые удовлетворяются при

$$m = 2n - 1; \quad n = \frac{m+1}{2}; \quad 0 < \varphi \leqslant \Delta + \varepsilon. \qquad (V.52)$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} &W(\varphi + 2n\Delta) = 0; \\ &W(\varphi - 2n\Delta) = f_b[(\varphi - \Delta) - 2n\Delta]. \end{aligned}\right\} \qquad (V.53)$$

Тогда уравнение (V.45) с помощью (V.39) и (V.43) имеет следующее решение:

$$f_b(\varphi + \Delta) = -\frac{A}{2n-1}[(n+1)\cos\varphi - \rho_a \cos[\varphi - (n+1)\Delta] - 2S_n \sin\varphi]. \qquad (V.54)$$

Найденные решения (V.50) и (V.54) относятся к интервалу $0 < \varphi \leqslant \Delta + \varepsilon$. Для других значений аргумента решения следует искать посредством продолжающих уравнений (V.39).

Аналогичным образом находим решения для функции W для нечетных m:

$$W(\varphi) = -nf_b(\varphi + \Delta) + A(C_n \cos\varphi - S_n \sin\varphi); \qquad (V.55)$$

для четных m:

$$W(\varphi - \Delta) = -nf_b(\varphi) + A[C_n \cos(\varphi - \Delta) - S_n \sin(\varphi - \Delta)]. \qquad (V.56)$$

Пользуясь продолжающим уравнением (V.40), можно записать значения этих функций для любого сдвига аргументов на $2k\Delta$ $(i = k)$ для нечетных m:

$$W(\varphi + 2k\Delta) = -(n-k) f_b(\varphi + \Delta) + A[(C_n - C_k)\cos\varphi - (S_n - S_k)\sin\varphi]; \qquad (V.57)$$

для четных m:

$$W[\varphi + (2k-1)\Delta] = -(n-k) f_b(\varphi) + A[(C_n - C_k)\cos(\varphi - \Delta) - (S_n - S_k)\sin(\varphi - \Delta). \qquad (V.58)$$

Найдем интервалы изменения функций, определяемые целочисленным аргументом k.

Случай 1. m — четное. Дуга τ разбивается на целое число $(n-1)$ интервалов длиной по 2Δ и один неполный интервал $0 < \varepsilon \leqslant \Delta$ в начале отсчета (рис. 61). Если $0 \leqslant \varphi \leqslant \varepsilon + \Delta$, то аргумент $\varphi'' = \varphi + (2k-1)\Delta$ при $k = 0$ остается в начальном неполном (нулевом) интервале

$$0 \leqslant \varphi'' \leqslant \varepsilon.$$

При $k = 1$

$$\varepsilon < \varphi'' \leqslant \varepsilon + 2\Delta;$$

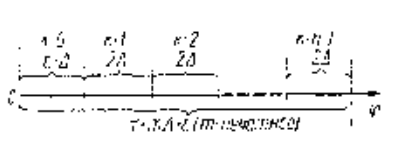
при $k = 2$

$$\varepsilon + 2\Delta < \varphi'' \leqslant \varepsilon + 4\Delta$$

и т. д. до $k = n - 1$.

Таким образом, число k равно порядковому номеру интервала, начиная от начала отсчета φ, включая и начальный нулевой интервал ($k = 0$). При этом число k равно целой части числа:

$$k = \left[\frac{\varphi'' - \varepsilon + 2\Delta}{2\Delta}\right]_{\text{ц}}. \quad (V.59)$$



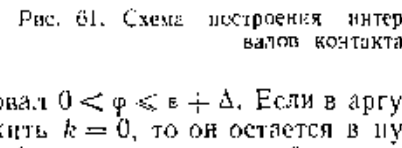


Рис. 61. Схема построения интервалов контакта.

Случай 2. m — нечетное. Дуга τ (рис. 61) разбивается на целое число $(n-1)$ интервалов длиной 2Δ и один начальный, нулевой интервал $0 < \varphi \leqslant \varepsilon + \Delta$. Если в аргументе $\varphi' = \varphi + 2k\Delta$ положить $k = 0$, то он остается в нулевом интервале; при $k = 1$ переходит в первый полный интервал:

$$\varepsilon + \Delta < \varphi' \leqslant \varepsilon + 3\Delta.$$

При $k = 2$

$$\varepsilon + 3\Delta < \varphi' \leqslant \varepsilon + 5\Delta$$

и т. д. до $k = n - 1$.

Число k равно порядковому номеру интервала от начала отсчета и целой части

$$k = \left[\frac{\varphi' - \varepsilon + \Delta}{2\Delta}\right]_{\text{ц}}. \quad (V.60)$$

Рассмотрим снова формулы (V.57), (V.58) и выразим аргумент φ в первой через $\varphi' = \varphi + 2k\Delta$, а во второй —

через $\varphi'' = \varphi + (2k-1)\Delta$; подставим значения функций $f_k(\varphi)$ из (V.50) и (V.51).

Тогда в прежнем обозначении аргумента при m четном получим:

$$W(\varphi) = A\,[(C_n - C_k)\cos v - (S_n - S_k)\sin v] +$$
$$+ \frac{n-k}{n} A \left\{ \varepsilon_n \sin(v + \Delta) + \frac{1}{2}\rho_n \cos[v - (n-1)\Delta] \right\}, \quad (V.61)$$

где

$$v = \varphi - 2k\Delta; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \tau; \quad k = \left[\frac{\varphi - \varepsilon + 2\Delta}{2\Delta}\right].$$

При m нечетном

$$W(\varphi) = A\,[(C_n - C_k)\cos v - (S_n - S_k)\sin v] +$$
$$+ A\frac{n-k}{2n+1}\{(n+1)\cos v + \varepsilon_n \cos[v - (n+1)\Delta] +$$
$$+ 2S_n \sin v], \quad (V.62)$$

где

$$v = \varphi - 2k\Delta; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \tau; \quad k = \left[\frac{\varphi - \varepsilon + \Delta}{2\Delta}\right].$$

Таким образом, поперечная нагрузка $W(\varphi)$ выражается кусочно — непрерывной функцией, имеющей конечные раз-

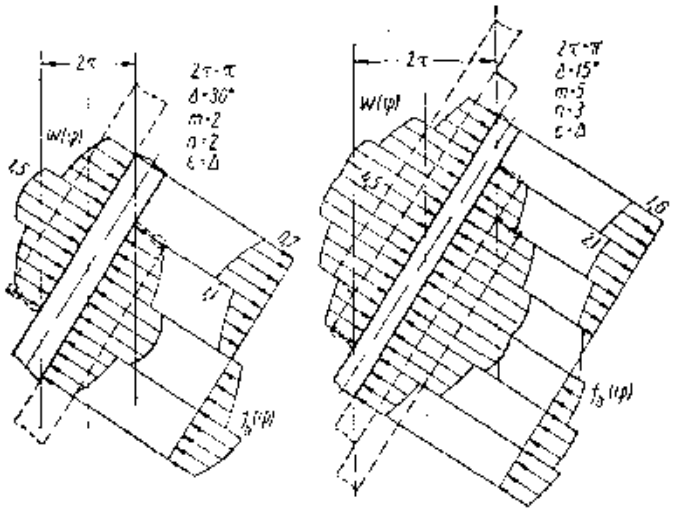


Рис. 62. Эпюры контактной нагрузки и поперечных сил.

рывы на границах интервалов, где происходит скачкообразное изменение целочисленного аргумента k.

На рис. 62 в произвольном масштабе показаны графики функций $W(\varphi)$ и $f_b(\varphi)$ для некоторых частных случаев при $A = 1$.

§ 35

УПРОЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Точное решение для функции $f_b(\varphi)$, а следовательно, и для $\eta(\varphi)$ приводит, как видим, к довольно сложным выражениям, неудобным для дальнейшего анализа. Поэтому при наличии точного решения можно подобрать к нему подходящее приближенное решение, которое построим следующим образом.

Разностному уравнению (V.26) удовлетворяет функция

$$\eta(\varphi) = \frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi + C. \qquad \text{(V.63)}$$

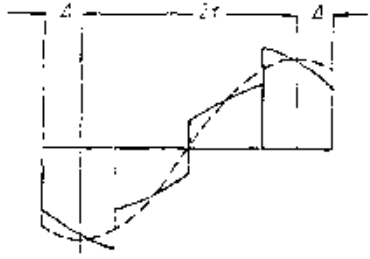


Рис. 63. График сравнения точного и приближенного решений.

Подставив эту функцию в уравнение (V.14), находим поперечную нагрузку

$$f_b(\varphi) = -\frac{Q}{R} \sin \varphi. \qquad \text{(V.64)}$$

Из рис. 62 видно, что функция $f_b(\varphi)$ близка к синусоиде и ее график усредненным образом представляется формулой (V.64). Так как эти графики построены при

$$A = \frac{2Q}{R} \sin \Delta = 1,$$

то для сравнения расчетов следует принять

$$Q = \frac{R}{2 \sin \Delta}.$$

На рис. 63 показаны графики сравнений точного решения с приближенным (V.64) по данным, приведенным на рис. 62. Отсюда видно, что функцию (V.64) можно принять в качестве ее приближенного значения.

Далее для определения функции $W(\varphi)$ обращаемся к разностному уравнению (V.31):

$$W(\varphi + \Delta) - W(\varphi - \Delta) = f_b(\varphi) = -\frac{Q}{R}\sin\varphi.$$

Так как

$$\cos(\varphi + \Delta) - \cos(\varphi - \Delta) = -2\sin\Delta\sin\varphi,$$

то решением этого уравнения может быть функция

$$W(\varphi) = \frac{Q}{2R\sin\Delta}\cos\varphi + C_1.$$

Остается выбрать произвольную постоянную C_1. Для этого воспользуемся граничными условиями (V.34) и (V.35), но они определяют функцию $W(\varphi)$ в целом интервале изменения ее аргумента, а не в одной точке. Как следует из рис. 61, на этих концевых интервалах эпюры $W(\varphi)$ изменяются не очень резко, поэтому можно выбрать в качестве граничного условия одну наиболее подходящую точку. Ввиду симметрии эпюр произвольная постоянная C_1 определяется из одного из этих условий. Возьмем первое условие (V.34):

$$W(\varphi - \Delta) = -f_b(\varphi); \quad \tau - \Delta \leqslant \varphi \leqslant \tau + \Delta.$$

Наилучший результат получается в средней точке при $\varphi = \tau$. Находим отсюда произвольную постоянную и получаем решение в следующем виде:

$$W(\varphi) = \frac{Q}{R}\cdot\frac{\cos\varphi - \cos(\tau - \Delta)}{2\sin\Delta}. \qquad (V.65)$$

Сравним полученное решение с точными расчетами на рис. 62 по срединным точкам при $\varphi = 0$ с максимальным давлением.

Первый случай ($\tau = \pi/2$; $\Delta = 30^\circ$):

$$W = \frac{1 - \cos 120^\circ}{4\sin^2 30^\circ} = 1{,}5.$$

Второй случай ($\tau = \pi/2$; $\Delta = 15^\circ$):

$$W = \frac{1 - \cos 105^\circ}{4\sin^2 15^\circ} = 4{,}7.$$

Соответствие значения этих величин по точному решению есть 1,5 и 4,5. Близкое соответствие значений в крайних точках обусловлено выбором произвольной постоянной. Таким образом, в инженерных расчетах вполне можно ограничиться формулами (V.64) и (V.65).

§ 36

ВНУТРЕННЯЯ КОНТАКТНАЯ НАГРУЗКА И ИЗГИБНАЯ ЖЕСТКОСТЬ КАНАТА

Картину влияния тангенциальных сил в канате подсказывает аналогия с изгибом плотно свитой винтовой пружины (рис. 64). Контакт между витками со стороны вогнутости препятствует их сжатию, и пружина в общем растягивается силой $P_к$, равной контактной силе. Нейтральная линия, на которой продольный размер пружины остается неизменным, находится в области точек тангенциального контакта. Аналогичную качественную картину следует ожидать и при изгибе каната.

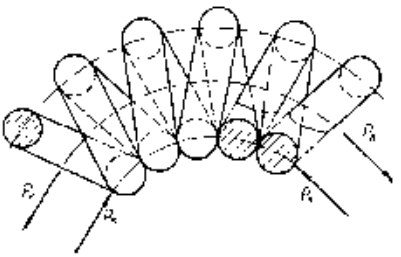


Рис. 64. Схема изгиба плотно свитой пружины.

При рассмотрении силовых факторов в канате можно выбрать его поперечное сечение так, что линия тангенциального контакта будет закрыта. В этом случае результат действия контактных сил следует искать через внутренние упругие силы в элементах каната путем интегрирования уравнений Кирхгофа. Это представляет известные трудности, если учесть еще разрывность функции $f_b(\varphi)$. Однако результат действия контактных сил, несколько упростив задачу, можно найти и без уравнений Кирхгофа. Для этого необходимо выбрать сложное сечение каната, вскрывающее полностью линию тангенциального контакта. Задача еще упростится, если найти равнодействующую тангенциальных контактных сил и через точку ее приложения провести поперечное сечение каната.

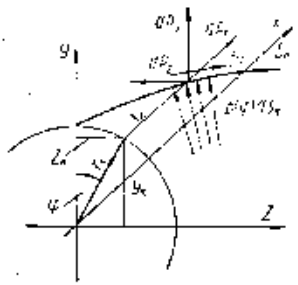


Рис. 65. К расчету внутренней контактной нагрузки в канате.

При определении равнодействующих сил и моментов тангенциальной контактной нагрузки будем пренебрегать

изогнутым состоянием каната, ибо это приводит к величинам второго порядка малости относительно кривизны. Тогда, выбрав координаты x, y, z так, что ось y проходит через середину линии контакта $S_к$ (рис. 65) в соответствии с полученными в главе I уравнениями (1.1), (1.31) и (1.32) будем иметь следующие значения координат линии $S_к$:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\varphi \operatorname{ctg} \alpha; \\ y &= -r_k \cos\varphi = r\cos\Delta\cos\varphi; \\ z &= r_k \sin\varphi = r\cos\Delta\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (V.66)$$

Вдоль линии $S_к$ действует распределенная контактная сила $p(\varphi)$, которая согласно (V.29)

$$p(\varphi) = \frac{W(\varphi)}{\cos\psi}.$$

Направляющие косинусы этой силы определены выражениями (1.33), которые записаны для отсчета угла φ вдоль линии S оси элемента каната. При отсчете угла φ вдоль линии контакта вместо $\varphi + \Delta$ в них следует подставить φ:

$$\left.\begin{aligned} k_n &= -\frac{r}{b}\sin 2\Delta \operatorname{tg}\alpha; \\ l_n &= 2\frac{r}{b}\sin\Delta\sin\varphi; \\ m_n &= -2\frac{r}{b}\sin\Delta\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (V.67)$$

При этом можно ввести в расчет и силы трения, направленные по касательной к линии контакта,

$$f_{тр} = \mu p(\varphi), \qquad (V.68)$$

где μ — коэффициент трения.

Направляющие косинусы для сил трения определяются из табл. 1 как для касательной t при $\alpha = \alpha_k$:

$$\left.\begin{aligned} k_t &= \cos\alpha_k; \\ l_t &= -\sin\alpha_k\sin\varphi; \\ m_t &= \sin\alpha_k\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (V.69)$$

Тогда проекции элементарных сил запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} dP_x &= p(\varphi)(k_0 + \mu k_1)\, ds_k; \\ dP_y &= p(\varphi)(l_0 + \mu l_1)\, ds_k; \\ dP_z &= p(\varphi)(m_0 + \mu m_1)\, ds_k. \end{aligned}\right\} \qquad (V.70)$$

Моменты этих сил относительно осей координат

$$\left.\begin{aligned} dm_x &= z dP_y - y dP_z; \\ dm_y &= z dP_x - x dP_z; \\ dm_z &= y dP_x - x dP_y. \end{aligned}\right\} \qquad (V.71)$$

Принимая во внимание, что согласно (I.4) и (I.31)

$$ds_k = \frac{r_k d\varphi}{\sin \alpha_k} = \frac{r \cos \Delta}{\sin \alpha_k} d\varphi, \qquad (V.72)$$

в соответствии с выражениями (I.34) и (V.29) элементарная контактная сила будет

$$p(\varphi)\, ds_k = W(\varphi) \frac{\delta \cos \alpha}{2 \sin \Delta \sin \alpha_k} d\varphi. \qquad (V.73)$$

В силу симметрии контактной нагрузки относительно оси y

$$\int_{s_k} dP_y = 0; \quad \int_{s_k} dm_y = 0. \qquad (V.74)$$

Из остальных факторов нас будут интересовать осевая сила

$$P_x = -\int_{s_k} dP_x = -k_1 \frac{r \cos \Delta \sin \alpha}{\sin \alpha_k} \int_{-\pi}^{+\pi} W(\varphi)\, d\varphi; \qquad (V.75)$$

крутящий момент

$$m_x = \int_{s_k} dm_x = k_1 r^2 \frac{\cos \Delta \cos \alpha}{\sin \alpha_k} \int_{-\pi}^{+\pi} W(\varphi)\, d\varphi \qquad (V.76)$$

и изгибающий момент

$$m_z = \int_{s_k} dm_z = k_1 r^2 \frac{\cos^2 \Delta \sin \alpha}{\sin \alpha_k} \int_{-\pi}^{+\pi} W(\varphi) \cos \varphi\, d\varphi -$$

$$- k_2 r^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha_k \sin \alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} W(\varphi) \sin \varphi\, \varphi\, d\varphi. \qquad (V.77)$$

где

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 1 + \mu \frac{h}{r} \cdot \frac{\cos \alpha_k}{\sin 2\Delta} \operatorname{ctg} \alpha; \\ k_2 &= 1 - \mu \frac{h}{r} \cdot \frac{\sin \alpha_k}{2 \sin \Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (V.78)$$

Осевая сила (V.75) принята отрицательной, так как она направлена в сторону сжатия каната.

Пользуясь далее упрощенным выражением (V.65), после интегрирования получим:

$$P_x = -k_1 Q \frac{r}{R} [\sin \tau - \tau \cos (\tau + \Delta)] \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_k} \operatorname{ctg} \Delta; \qquad (V.79)$$

$$m_x = -\frac{k_2}{k_1} P_x r \operatorname{ctg} \alpha; \qquad (V.80)$$

$$m_z = \frac{Qr^2}{2R} \frac{}{\sin \Delta \sin \alpha_k} \left[k_1 \omega_1 (\tau) \cos^2 \Delta \sin \alpha + k_2 \omega_2 (\tau) \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} \right], \qquad (V.81)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 (\tau) &= \tau + \sin \tau \cos \tau - 2 \sin \tau \cos (\tau + \Delta); \\ \omega_2 (\tau) &= 4 (\sin \tau - \tau \cos \tau) \cos (\tau + \Delta) + \\ &+ \tau \cos 2\tau - \sin \tau \cos \tau. \end{aligned}\right\} \qquad (V.82)$$

В этих расчетах остался неопределенным угол контакта 2τ. Величина области тангенциального контакта элементов каната со стороны его вогнутости во многом определяется начальным тангенциальным зазором, связанным с рядом случайных трудно поддающихся точному учету факторов. Однако простые рассуждения показывают, что при достаточном изгибе каната тангенциальный контакт стремится охватить всю вогнутую часть каната. Если канат свит плотно, с натягом, то его изгиб сопровождается образованием зазоров, стремящихся охватить всю выпуклую его часть, оставляя вогнутую часть в состоянии тангенциального контакта. Это дает основания величину угла усредненно принять

$$2\tau = \pi; \quad \tau = \frac{\pi}{2}.$$

В соответствии с § 4 в данных расчетах можно принять

$$\Delta = \frac{\pi}{m}.$$

В многослойном канате контактная нагрузка суммируется по всем n слоям проволок или прядей:

$$T_x = \sum_i^n P_x^{(i)}; \quad M_x = \sum_i^n m_x^{(i)}; \quad M_z = \sum_i^n m_z^{(i)}. \qquad (V.83)$$

Эта контактная нагрузка является дополнительной к действовавшей ранее рабочей нагрузке в прямом канате, т. е. для осуществления изгиба каната, кроме преодоления его упругих сил, необходимо еще приложить обратную по знаку контактным силам внешнюю нагрузку

$$T_k = -T_z; \quad M_k = -M_x; \quad L_k = -M_y. \qquad (V.84)$$

Продольная сила T_k, как и в пружине на рис. 64, вызывает удлинение оси каната при изгибе. Крутящий момент M_k реализуется в зависимости от характера закрепления концов каната. Если концы каната закреплены от вращения жестко, то этот момент реализуется реакцией закрепления. При свободных концах крутящий момент реализуется только внутренними упругими силами, вызывая его поворот.

В реальных условиях закрепление концов изгибаемого отрезка каната на блоке вследствие податливости его прямой ветви является упругим. Тогда момент M_k уравновешивается частично упругими силами в изогнутой его части и частично реакцией закрепления.

В общем случае, используя уравнения упругости прямого каната (II.36), это можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} T_k &= A\varepsilon + C\theta; \\ M_k &= C\varepsilon + B\theta - M_{закр}, \end{aligned}\right\} \qquad (V.85)$$

где $M_{закр}$ — реактивный момент в закреплении.

При жестком закреплении ($\theta = 0$), например, получим:

$$\varepsilon = \frac{T_k}{A}; \quad M_{закр} = M_k - \frac{C}{A} T_k. \qquad (V.86)$$

Полученные зависимости показывают наличие упруго-контактной связи между изгибом, растяжением и кручением каната. Эта связь односторонняя, т. е. она существует только при наличии изгиба каната. Изгибающий момент L_k (V.84) связан с увеличением изгибной жесткости каната при стеснённом изгибе.

Входящий в расчет коэффициент Q согласно (V.28)

$$Q = \frac{P_{ст}^0}{\cos\alpha} + 6\frac{EI}{r^2}\sin^4\alpha\cos\alpha.$$

В связи с этим контактная нагрузка состоит из двух составляющих: от осевого натяжения элементов и от их изгибной жесткости.

Таблица 39

Расчет внутренней контактной нагрузки в прядях ТК при $\delta = 1$ *мм*, $R = 1$ *мм*, $\mu = 0{,}1$

Конструкция слоев проволок и прядей	σ^0	$T_k = a_1 + b_1\sigma$ *кГ*		$M_k = a_2 + b_2\sigma$ *кГ · см*		$L_k = a_3 + b_3\sigma$ *кГ · см*		$a_{пр}$, *мм*
		a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	
1 + 6	14 16	100 143	4,2 3,5	23 36	1,2 0,9	63 79	2,6 2,0	3,0
Второй слой, 12 проволок	14 16	77 120	12,3 12,0	44 62	7,1 6,1	74 93	12,2 9,2	—
Третий слой, 18 проволок	14 16	66 101	25 23,6	50 81	22,2 18,8	97 117	35,8 29	—
Прядь 1 × 19 1 + 6 + 12	14 16	177 263	16,5 15,5	71 98	8,3 7,0	137 172	14,9 11,2	5,0
Прядь 1 × 37 1 + 6 + 12 + 18	14 16	243 344	41,5 39,1	130 179	30,5 25,8	232 289	50,6 37,2	7,0
Прядь 1 × 37 (1 + 6 + 12) — 18	— —	— —	— —	+12 +17	—14 —12	—	— —	7,0

В табл. 39 представлен расчет контактной нагрузки в типовых прядях ТК с единичным диаметром проволок при изгибе по единичному радиусу. Осевое натяжение в проволоках выражено через нормальные напряжения σ как

$$P_t^0 = \frac{\pi\delta^2}{4}\sigma.$$

В общем виде для других диаметров проволок эту нагрузку можно представить так:

$$T_k = \frac{\delta^3}{R}(a_1 + b_1\sigma)\,\kappa Г;$$

$$M_k = \frac{\delta^4}{R}(a_2 + b_2\sigma)\,\kappa Г \cdot см;$$

$$L_k = \frac{\delta^4}{R}(a_3 + b_3\sigma)\,\kappa Г \cdot см,$$

где значения коэффициентов a и b следует брать из табл. 39, величины δ и R подставляются в *мм*, а σ в *кГ/мм²*.

Рассмотрим конкретно прядь 1×37 при $\alpha = 14°$ (№ 3 из табл. 14). Беря $R = 70$ мм, что соответствует области малых значений $D/d = 20$, при $\sigma = 30$ кГ/мм², получим:

$$T_k = \frac{243 + 41{,}5 \cdot 30}{70} = 21 \text{ кГ};$$

$$M_k = \frac{130 + 30{,}5 \cdot 30}{70} = 15 \text{ кГ} \cdot \text{см};$$

$$L_k = \frac{232 + 50{,}6 \cdot 30}{70} = 25 \text{ кГ} \cdot \text{см}.$$

Сравним эти данные с рабочей нагрузкой в канате. Среднему напряжению соответствует осевое усилие в канате $T = 870$ кГ, поэтому дополнительное контактное осевое усилие будет пренебрежимо малым по сравнению с рабочей нагрузкой в канате, т. е. сила T_k всегда реализуется.

Крутящий момент в пряди от осевой нагрузки, найденный по формуле (II.40) согласно данным для пряди № 3 из табл. 14,

$$M = \frac{C}{A} T = \frac{30\,652}{567\,490} \cdot 870 = 47 \text{ кГ} \cdot \text{см},$$

что имеет тот же порядок, что и M_k.

Таблица 40

К определению изгибной жесткости пряди

№ по пор.	Конструкция пряди	Диаметр, мм		Жесткость на изгиб, кГ/см²	
		прядей	проволок	по опыту	по формуле $g = \Sigma EI$
1	1 + 6	3,6	1,2	153	151
2	1 + 6	4,2	1,4	210	278
3	1 + 6	4,8	1,6	473	469
4	1 + 6	5,4	1,8	739	756
5	1 + 6 + 12	4,0	0,8	85,4	80
6	1 + 6 + 12	5,05	1,0	190	196
7	1 + 6 + 12	6,0	1,2	423	410

Момент L_k можно оценить по изгибной жесткости пряди. Из опытов [71] (табл. 40) известно, что изгибная жесткость свободных прядей с высокой точностью равна сумме изгибных жесткостей проволок*:

$$g_0 = \Sigma EI.$$

Изгибающий момент L_k при $R = 1$ см равен дополнительной изгибной жесткости пряди от внутренней контактной нагрузки, т. е.

$$g_{\text{конт}} = 25 \cdot 7 = 175 \text{ кГ} \cdot \text{см}^2.$$

* Согласно ГОСТ 9867–61

$$g\,(\text{дин}\cdot\text{см}^2) = 9{,}81 \cdot 10^{-4} g\,(\text{кГ} \cdot \text{см}^2).$$

В то же время

$$g_0 = 37 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}14^4}{64} = 360\ кГ \cdot см^2.$$

Отсюда видно, что внутренняя контактная нагрузка обусловливает существенное увеличение изгибной жесткости канатов в зависимости от рабочей осевой нагрузки, что в общем согласуется с известными опытами Стефана [112] и других авторов [56].

В общем виде изгибную жесткость каната можно записать так:

$$g = g_0 + (L_k)_{R=1}. \qquad (V.87)$$

Для рассматриваемых прядей эта формула при тех же условиях, которые заложены в табл. 39, преобразуется к такому виду:

$$g = \frac{\delta^4}{10}[(100n + a_g) + b_g z]\ кГ \cdot см^2.$$

Для канатов двойной свивки расчет ведется по той же общей формуле (V.87), только вместо EI для проволок следует брать g для прядей:

$$G = G_0 + (L_k)_{R=1}; \quad G_0 = \Sigma g. \qquad (V.88)$$

Соответствующие расчеты для канатов ТК $6 \times 19 + о.с.$ и $6 \times 37 + о.с.$ при $\delta = 1$ по данным для прядей из табл. 39 приводят к следующим формулам.

Для каната $6 \times 19 + о.с.$ при $\beta = 14°$

$$G = [1260 + (130 \div 132)z]\delta^4 = 1260(1 + 0{,}104z)\delta^4\ кГ \cdot см^2;$$

при $\beta = 16°$

$$G = [1290 + (104 \div 106)z]\delta^4 = 1290(1 + 0{,}0815z)\delta^4\ кГ \cdot см^2.$$

Для каната $6 \times 37 + о.с.$ при $\beta = 14°$

$$G = [2460 + (492 \div 500)z]\delta^4 = 2460(1 + 0{,}202z)\delta^4\ кГ \cdot см^2;$$

при $\beta = 16°$

$$G = [2520 + (392 \div 400)z]\delta^4 = 2520(1 + 0{,}157z)\delta^4\ кГ \cdot см^2.$$

Здесь в первых выражениях этих коэффициентов в круглых скобках показано различие значений, обусловленное влиянием углов свивки проволок в прядях при $\alpha = 14°$ и $\alpha = 16°$, которое получается незначительным.

Аналогичные расчеты для каната $6 \times 61 + о.с.$ при $\beta = 16°$ приводят к такой формуле:

$$G = 4150(1 + 0{,}261z)\delta^4\ кГ \cdot см^2.$$

Так как диаметр этих канатов при одном и том же диаметре проволок получается различным, то для дальнейшего сравнения приведем их к одному диаметру. С этой целью для каната $6 \times 19 + о.с.$ берем $\delta = 1$; тогда для каната $6 \times 37 + о.с.$ следует взять $\delta = 0{,}715$, а для каната $6 \times 61 + о.с.$ $\delta = 0{,}555$. Это соответствует их одинаковому диаметру около 15 *мм*, если не учитывать колебаний за счет органического сердечника.

В результате при $\beta = 16°$ для каната $6 \times 19 + о.с.$ находим

$$G = (1290 + 105\sigma)\ кГ \cdot см^2;$$

для каната $6 \times 37 + о.с.$

$$G = (660 + 103\sigma)\ кГ \cdot см^2;$$

для каната $6 \times 61 + о.с.$

$$G = (394 + 106\sigma)\ кГ \cdot см^2.$$

Второй член в этих формулах получается одинаковым, так как он слабо зависит от конструкции пряди, а определяется только геометрией свивки каната. Вот почему эти канаты ввиду различных конструкций прядей имеют существенно различную нулевую изгибную жесткость, но примерно одинаковую скорость роста ее от натяжения. Отсюда следует, что при больших натяжениях каната, когда преобладающими являются вторые члены в этих формулах, существенного различия в изгибных жесткостях этих канатов не наблюдается. Этот вывод заслуживает серьезного внимания с точки зрения выбора конструкций канатов для различных подъемных систем.

ГЛАВА 6

РАБОТА КАНАТОВ НА БЛОКАХ И БАРАБАНАХ

Рассмотренные выше задачи о прямом канате и его плоском изгибе в отдельности еще далеко не решают всей проблемы. При набегании каната на блок явления, происходящие в прямом и изогнутом участках каната, сочетаются в сложном сплошном взаимодействии, картина которого пока только ждет своего изучения.

В данной главе рассматриваются только некоторые вопросы контактных напряжений и явлений, связанных с набеганием канатов на блоки и барабаны.

§ 37

КОНТАКТ КАНАТА С БЛОКОМ

В систематическом накоплении повреждений и последующем разрушении каната преимущественную роль играют поперечные нагрузки, возникающие при контакте каната с канавкой блока. Эти нагрузки связаны как непосредственно с контактными напряжениями, так и с напряжениями, вызванными нарушением поперечной формы каната и прядей, которые в литературе принято называть напряжениями вторичного изгиба [115]. Все эти напряжения трудно поддаются расчету, и пока лишь можно судить о некоторых их качественных соотношениях.

Напряжения вторичного изгиба Внес [115] связывает с тем, что проволока в пряди ТК располагается как кривая многопролетная балка. Поперечная нагрузка со стороны блока, действуя посередине пролета, вызывает местный изгиб проволоки. Возникающие при этом напряжения тем больше,

чем больше длина пролета. В § 6 формулой (I.54) было показано, что длина пролета резко уменьшается при переменном направлении точечно контактирующих слоев проволок. Следовательно, канаты ТК с переменным направлением свивки слоев проволок должны обладать большей стойкостью на шкиве, чем обычные. Это же показывает и анализ концентрации напряжений от осевой нагрузки (§ 14).

Опыты на пробежных машинах убедительно подтверждают эти предположения. В табл. 41 показаны соответствующие опыты Воерле [114] с канатами односторонней свивки, а в табл. 42 эти результаты подтверждены нами и для канатов крестовой свивки.

Таблица 41

Опыты Воерле с канатами односторонней свивки*

№ по пор.	Тип каната	Технология изготовления	Свивка прядей	Число перегибов до полного разрушения в тысячах
1	(6 × 61) 0 + о.с.	Обыкновенные	1+6+12+18+24	250
2	То же	»	1—6+12—18+24	450
3	» »	Нераскручивающиеся	1+6+12+18+24	310
4	» »	»	1—6—12—18+24	380
5	» »	»	1—6+12—18+24	600
6	(6 × 37) 0 + о.с.	»	1+6+12+18	480
7	То же	»	1+6—12+18	620

Таблица 42

Испытания на работоспособность канатов (6 × 37) К + м.с. диаметром 9,8 *мм*; $D/d = 12{,}2$; $m = 14$

№ по пор.	Свивка прядей	Число перегибов	Число оборванных проволок	
			по длине каната	на шаге свивки
1	1+6+12+18	10 000	648	9
2	1+6—12+18	10 000	311	5

Кроме длины пролета, величина напряжений зависит от характера вписывания наружной проволоки в поверхность канавки блока (рис. 66). Очевидно, наилучшим вариантом

* Данные к опытам: $d = 22$ *мм*, $D/d = 45$; растягивающая нагрузка до запаса прочности $m = 7$.

контакта будет совпадение кривизны проволоки и нормального сечения поверхности канавки блока. Последнюю можно определить по формуле Эйлера [94]

$$K_1 = \frac{\cos^2\psi}{R} + \frac{\sin^2\psi}{\rho}, \qquad (VI.1)$$

где R, ρ — главные радиусы кривизны поверхности канавки блока (рис. 67).

Угол ψ — это угол наклона к параллелям блока винтовой линии, проведенной на поверхности проволоки на

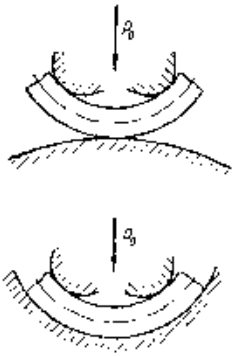


Рис. 66. Варианты контакта проволоки со шкивом.

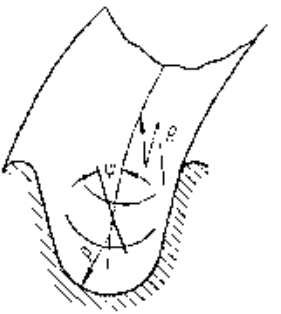


Рис. 67. К определению кривизны нормального сечения поверхности желоба шкива.

радиусе, равном внешнему диаметру пряди, и определяется суммой углов свивки проволоки в прядь и пряди в канат, приведенных на поверхность каната:

$$\psi = \alpha' + \beta'. \qquad (VI.2)$$

Приведенные углы свивки определяются так:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\pi d_{пр}}{h_{пр}}; \quad \operatorname{tg}\beta' = \frac{\pi d_к}{h_к},$$

где $d_{пр}$, $d_к$, $h_{пр}$, $h_к$ — диаметры и шаги свивки пряди и каната.

Если через K_0 обозначить кривизну поверхностной винтовой линии на проволоке, то условие ее полного вписывания в поверхность блока запишется так:

$$K_1 - K_0 = 0. \qquad (VI.3)$$

При одинаковых кратностях свивки $\alpha' = \beta'$, что можно принять для ориентировочной оценки этого условия, для крестовой свивки ($\alpha' = -\beta'$) получим

$$K_0 = -\frac{1}{R}, \qquad (VI.4)$$

что практически возможно только для несвитой проволоки.

Для односторонней свивки ($\alpha' = \beta'$) находим

$$K_0 = \frac{\sin^2 2\alpha'}{\rho} - \frac{\cos^2 2\alpha'}{R}. \qquad (VI.5)$$

Второй член в правой части, как минимум, на порядок ниже первого, и им свободно можно пренебречь, а первый

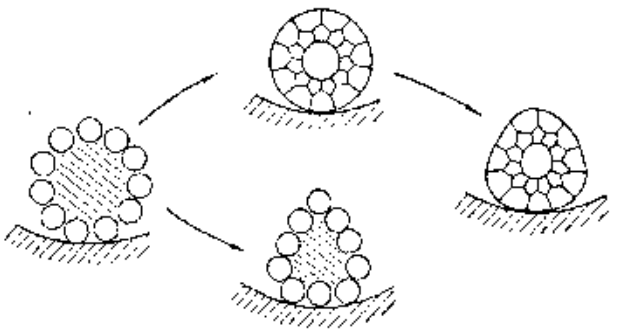


Рис. 68.
Схема эволюции поперечного сечения прядей.

имеет тот же порядок, что и начальная кривизна проволоки в канате. Поэтому в отличие от крестовой односторонняя свивка каната допускает более полное вписывание проволок в поверхность желоба шкива. Следовательно, канаты односторонней свивки испытывают меньшие контактные и вторичные изгибные напряжения, чем и объясняется их повышенная стойкость на блоках [42].

Поиски новых конструктивных форм канатов в целях уменьшения контактных напряжений выражаются в эволюции прядей (рис. 68) из круглопроволочной формы в трехгранник или в круг фасонными проволоками и далее — в фасоннопроволочный трехгранник. Последние две формы прядей получаются волочением готовой пряди в агрегатном состоянии в круглый профиль, а затем могут быть прокатаны в трехгранник [40, 34, 35].

В работах П. П. Нестерова и А. П. Ветрова [74] напряжения вторичного изгиба связываются не только с местным прогибом проволок, но и с изменением поперечной формы самой пряди, охватывая таким образом и пряди ЛК.

Поперечная деформация пряди Δ под нагрузкой P на единицу длины существенно зависит от напряжений растяжения пряди σ. На рис. 69 показаны результаты таких испытаний [74] для пряди ЛК. Это явление трудно поддается расчету, в связи с чем указанная теория носит полуэмпирический характер. Получающиеся при этом напряжения имеют довольно большие значения и, вероятно, играют существенную роль в работоспособности канатов. Опыты В. Н. Чаругина [37, 96] с прядями ТК показывают, что они обладают большей поперечной жесткостью, чем ЛК, возрастающей во много раз при переменном направлении свивки слоев проволок. Это еще раз свидетельствует в пользу переменного направления свивки точечно контактирующих слоев проволок в прядях ТК и ТЛК.

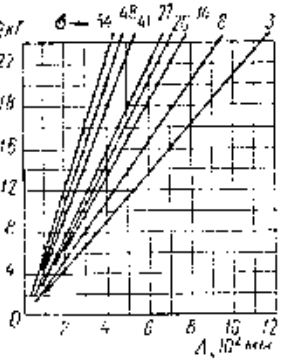


Рис. 69. График результатов испытаний пряди ЛК 1 + 6 + 6/6 на раздавливание.

§ 38

КРУЧЕНИЕ КАНАТОВ НА БЛОКАХ И БАРАБАНАХ

Процесс набегания каната на блоки и барабаны в связи с винтовым движением, углами девиации и явлением самого изгиба сопровождается его кручением, которое является дополнительной надбавкой к общим напряжениям в канате и в ряде случаев может служить причиной снижения стойкости и нарушения структуры каната.

При винтовой навивке каната на барабан (рис. 70) его конец a вращается относительно конца b так, как в спрямленном состоянии конец a' вращался бы с угловой скоростью ω', равной проекции угловой скорости ω вращения

барабана на ось навитого каната:

$$\omega' = \omega \sin \gamma,$$

где γ — угол подъема винтовой линии навивки каната.

Учитывая малость этого угла, можно принять

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{t}{\pi D}; \quad \cos \gamma \approx 1, \qquad (VI.6)$$

где t — шаг навивки каната.

Отсюда кручение винтовой линии навивки

$$\tau_в = \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{R} = \frac{2\gamma}{D} = \frac{2t}{\pi D^2}. \qquad (VI.7)$$

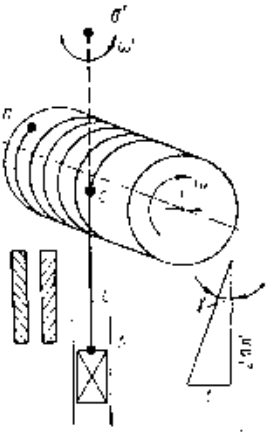


Рис. 70. Схема навивки каната на барабан.

Кручение каната не равно этому кручению винтовой линии ввиду наличия свободной ветви bc. Полагая в связи с этим, что под действием сил трения канат на барабане не проворачивается, можно записать следующее условие неразрывности кручения в точке c:

$$\frac{dv}{ds} + \frac{v}{L-s} = \tau_в, \qquad (VI.8)$$

где L — полная длина каната;

s — длина, навитая на барабан;

v — некоторый угол откручивания.

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, запишется так:

$$v = (L-s)\,\tau_в \ln \frac{L}{L-s}. \qquad (VI.9)$$

Деформация кручения набегающей ветви каната

$$\theta = \frac{v}{L-s} = \tau_в \ln \frac{L}{L-s} = -\tau_в \ln\left(1 - \frac{s}{L}\right). \qquad (VI.10)$$

При $s \to L$, т. е. при набегании точки b на барабан, деформация стремится к бесконечности. Однако это практически не реализуется ввиду свойств натурального логарифма. Так, например, при

$$\ln\left(1 - \frac{s}{L}\right) = -10; \quad (L-s) = 4{,}5\,L \cdot 10^{-5},$$

т. е. для этого при километровом канате точка b должна приблизиться к барабану на 4.5 *см*.

Однако деформация не может возрасти до бо́льших величин, чем это обусловлено проворачиванием каната на барабане. Это все же показывает возможность накопления большого кручения набегающей на барабан ветви каната. Так как это явление неизбежно, то желательно выбрать такое направление кручения каната, которое меньше отразилось бы на его стойкости.

Опыты Гербста [106] показывают, что предпочтение следует отдать закручиванию каната. Для этого существует

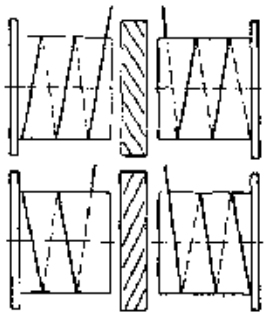


Рис. 71. Правила навивки каната на барабан.

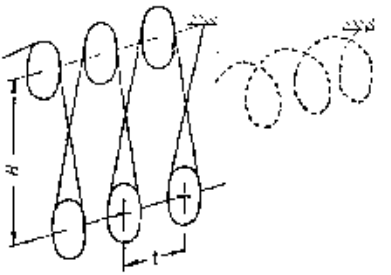


Рис. 72. Винтовая навивка каната на полиспасте.

известное правило навивки канатов на барабан: канат правой свивки должен иметь правую навивку на барабан, канат левой свивки — левую (рис. 71).

Огибание канатом системы блоков на полиспасте (рис. 72) также представляет собой винтовую линию с параметрами, изменяющимися с высотой подъема H, что сопровождается переменным скручиванием каната.

Как показывает статическое обследование каната (§ 36), плоский изгиб сопровождается появлением внутренних контактных сил и моментов (V.83), которые вызывают осевые и крутильные деформации каната. Для их оценки следует воспользоваться уравнениями (V.85), в которых момент $M_{закр}$ обусловлен крутильной жесткостью набегающей ветви каната:

$$M_{закр} = H \frac{r}{L - s}, \qquad \text{(VI.11)}$$

где v — угол скручивания каната в точке набегания на блок;

$H = B - \frac{C^2}{A}$ — крутильная жесткость каната.

Тогда выражения (V.85) можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} T_к &= A\varepsilon + C\theta; \\ M_к &= C\varepsilon + B\theta + H\frac{v}{L-s}. \end{aligned}\right\} \qquad (VI.12)$$

Угол скручивания каната в точке набегания на блок равен накоплению деформаций кручения в набежавшей на блок длине каната, т. е.

$$v = \int_0^s \theta ds; \qquad \frac{dv}{ds} = \theta. \qquad (VI.13)$$

Тогда, исключив в (VI.12) ε, получим уравнение для угла скручивания:

$$\frac{dv}{ds} + \frac{v}{L-s} = \tau_к, \qquad (VI.14)$$

где

$$\tau_к = \frac{AM_к - CT_к}{AH - C^2}. \qquad (VI.15)$$

Это уравнение формально совпадает с (VI.8) и имеет те же решения при замене $\tau_н$ на $\tau_к$.

Рассмотрим влияние углов девиации.

Канат при набегании на блок не сразу укладывается по центру канавки, а начинает соприкасаться с его поверхностью в некоторой точке b (рис. 73), затем это сечение каната смещается в точку c'. При достаточно длинной набегающей ветви каната, когда ее крутильная жесткость мала, это смещение происходит перекатыванием каната, вызывая его кручение. При короткой ветки каната следует учитывать взаимодействие сил трения на блоке $F_{тр}$ с упругим моментом в канате. Для первой оценки этого явления будем считать канат абсолютно гибким и его крутильной жесткостью также будем пренебрегать, сведя расчет к чистой кинематике.

Вместо поверхности канавки блока введем в расчет отстоящую от нее на $d/2$ мнимую поверхность W' на уровне геометрической оси каната.

Плоскость блока совпадает с плоскостью (yz). Проекции орта нормали n к поверхностям W и W' в точке b на оси координат запишутся так:

$$n_x = \cos\alpha; \quad n_y = \sin\alpha\cos\varphi; \quad n_z = \sin\alpha\sin\varphi.$$

Ось каната в точке b соприкосновения с блоком располагается в плоскости (xy) под углом девиации γ к плоскости (yz). Тогда проекции орта касательной l к оси каната в этой точке на оси координат могут быть записаны так:

$$l_x = -\sin\gamma; \quad l_y = 0; \quad l_z = \cos\gamma.$$

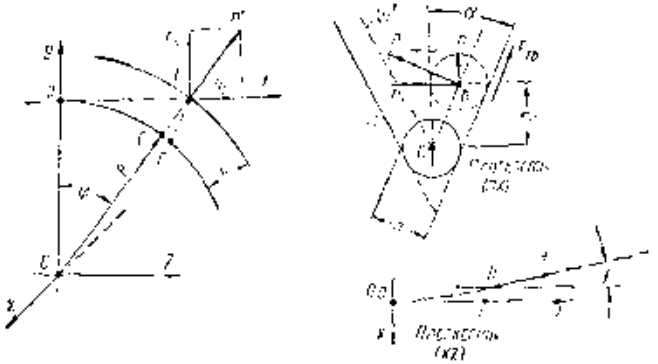


Рис. 73. Схема набегания каната на блок.

Углы α и γ полагаем заданными из конструктивных данных.

Неизвестный угол φ может быть найден из условия перпендикулярности единичных векторов $\bar{n}$ и $\bar{l}$, т. е.

$$l_x n_x + l_y n_y + l_z n_z = 0.$$

Отсюда следует

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (VI.16)$$

Обычные углы γ и φ малы, что позволяет записать:

$$\varphi = \gamma\operatorname{ctg}\alpha; \quad \cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2. \qquad (VI.17)$$

Радиальное смещение h запишется как разность:

$$h = \frac{R}{\cos\varphi} - R \approx \frac{1}{2}R\varphi^2. \qquad (VI.18)$$

Ввиду малости угла φ можно принять

$$bc' = bc = \frac{h}{\cos\alpha}.$$

Полагая, что этот путь смещения равен длине перекатывания каната, находим угол поворота

$$\vartheta = \frac{2bc'}{d} = \frac{2h}{d\cos\alpha}. \qquad \text{(VI.19)}$$

Этот поворот совершается на длине набегания каната

$$ab = R\,\mathrm{tg}\,\varphi \simeq R\varphi.$$

Тогда кручение каната на блоке как угол поворота, отнесенный к единице длины, будет

$$\tau_{\text{дев}} = \frac{\vartheta}{ab} = \frac{\varphi}{d\cos\alpha} = \frac{\gamma}{d\sin\alpha}. \qquad \text{(VI.20)}$$

Полученное решение верно до тех пор, пока скорость изменения крутящего момента в канате на блоке по абсолютной величине меньше распределенного момента сил трения, т. е.

$$\left|\frac{dM}{ds}\right| < m_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}\frac{d}{2} = \mu\frac{T}{\rho}\cdot\frac{d}{2}, \qquad \text{(VI.21)}$$

где T — натяжение в канате;

ρ — радиус кривизны нормального сечения поверхности блока в направлении t;

μ — коэффициент трения.

Ввиду малости углов φ и γ можно принять

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin\alpha}{R},$$

что равно кривизне нормального сечения конуса. Введя далее крутильную жесткость каната H из (II.45), получим:

$$H\left|\frac{d\vartheta}{ds}\right| \leqslant \mu T\sin\alpha\,\frac{d}{D} = k. \qquad \text{(VI.22)}$$

В процессе накопления деформаций при $s = s_0$ может наступить равенство в этом выражении и формула (VI.20) потеряет силу. Для определения этой точки подставим в равенство (VI.22) ϑ из (VI.10) при τ из (VI.20). Тогда, полагая $s = s_0$, найдем

$$s_0 = l - \frac{D}{d}\,H\,\frac{\tau_{\text{дев}}}{\mu T\sin\alpha}. \qquad \text{(VI.23)}$$

При $s > s_0$ вступает в силу выражение (VI.22) в виде равенства, интегрируя которое находим

$$M = H\theta = k(s - s_0) + H\theta_0,$$

где $\theta_0 = \theta(s_0)$ из предыдущего периода качения.

Условие неразрывности деформаций в точке набегания на блок

$$\theta = \frac{\vartheta}{L - s},$$

где ϑ — угол скручивания ветви каната.

Отсюда при $s > s_0$ следует

$$\vartheta = (L - s)\left[\theta_0 + \frac{k}{H}(s - s_0)\right]. \qquad \text{(VI.24)}$$

Расчеты показывают, что превалирующее значение в кручении канатов на блоках и барабанах играют углы девиации. Величины $\tau_в$ (VI.7) и $\tau_н$ (VI.15) более низкого порядка, чем $\tau_{дев}$ (VI.20).

Исследование кручения канатов на многоблочном полиспасте с учетом, например, только $\tau_{дев}$ приводит к сложной системе уравнений, связывающих накопление кручения на каждом блоке, при изменяющихся с высотой подъема углах девиации.

§ 39

ЯВЛЕНИЕ ШТОПОРА ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ РАСТЯЖЕНИИ И ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОГНУТОГО КАНАТА В ОБЛАСТИ НАБЕГАНИЯ НА БЛОК

В изогнутом канате прядь периодически проходит то вогнутую, то выпуклую его сторону. Если бы ось пряди была линией, начерченной на круглом стержне, то на выпуклой стороне изогнутого стержня она получила бы удлинение, а на вогнутой — сжатие. Поскольку же прядь свободна, то натяжение в ней выравнивается путем смещения точек ее оси из сжатой области в растянутую. Если отбросить влияние сил трения, то при равномерном изгибе по постоянному радиусу сжатие и растяжение взаимно компенсируются полностью в пределах каждого шага свивки, что обусловливает высокую гибкость каната. При неравномерном изгибе каната прядь проходит неравноценные по

величине зоны растяжения и сжатия, и компенсации смещений не происходит, в результате чего одни пряди получают некоторое расслабление, другие — дополнительные натяжения, которые тем больше, чем больше скорость изменения кривизны вдоль оси каната. Неравномерный изгиб каната наблюдается во всех случаях в области его набегания на блоки и барабаны.

Под влиянием изгибной жесткости форма оси каната в точке набегания на блок изменяется не скачкообразно из прямой в изогнутую, а ее кривизна в сторону ветви каната убывает по экспоненциальной кривой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} e^{-kx}, \qquad \text{(VI.25)}$$

где R — радиус блока;

x — координата оси каната, отсчитываемая от точки соприкосновения каната в сторону набегающей ветви;

k — некоторый коэффициент, зависящий от натяжения каната T и его изгибной жесткости G.

Так как величина kx должна быть безразмерной, то это приводит к значению

$$k = \sqrt{\frac{T}{G}}. \qquad \text{(VI.26)}$$

Этот же результат следует и из уравнения упругой линии каната. Скорость изменения кривизны оси каната в точке набегания на блок равна производной

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho}\right)_{x=0} = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{T}{G}}, \qquad \text{(VI.27)}$$

которая при абсолютно гибком канате ($G = 0$) обращается в бесконечность.

Для приближенной оценки возникающих при этом смещений элементов каната воспользуемся формулой (I.85) из общей геометрической теории деформаций. Рассматривая плоский изгиб каната и отбрасывая вначале влияние сужения ε_r и смещений u и v в системе отсчета на рис. 74, получим

$$\varepsilon_s = \frac{r}{\rho} \cos^2\alpha \sin\varphi. \qquad \text{(VI.28)}$$

Это и есть то относительное удлинение, которое должна получить прядь, если не учитывать компенсации смещений. При равномерном изгибе каната ($\rho = \text{const}$) интеграл от этого выражения на длине шага свивки равен нулю:

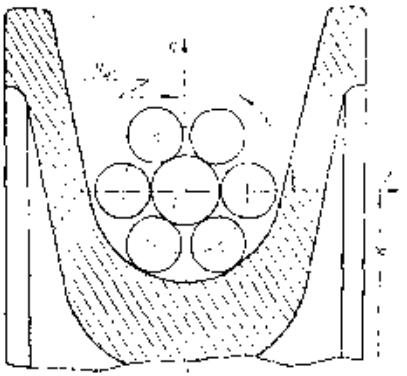


Рис. 74. Система координат в сечении каната в точке его набегания на блок.

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \varepsilon_s d\varphi = 0. \qquad (VI.29)$$

Следовательно, имеются все условия для полной компенсации положительных и отрицательных дополнительных натяжений в пряди.

Осевые перемещения элемента каната ζ (рис. 75) можно найти из условия равенства нулю его относительного удлинения

$$\varepsilon_s + \frac{d\zeta}{ds} = 0,$$

где $d\zeta/ds$ отражает отброшенную вначале часть в уравнении (I.85). Отсюда, принимая во внимание, что

$$ds = \frac{r\,d\varphi}{\sin\alpha} = \frac{dx}{\cos\alpha},$$

после интегрирования получим

$$\zeta(\varphi) = -\frac{r^2}{k} \times \times \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \qquad (VI.30)$$

где φ_0 — координата закрепления оси элемента.

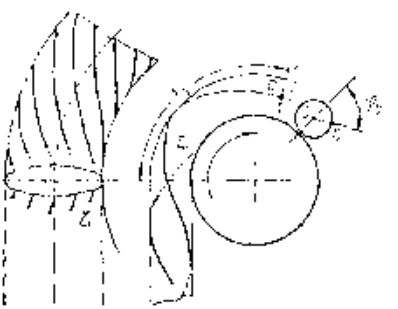


Рис. 75. Смещения элементов каната на блоке.

Такая картина смещений наблюдается в равномерно изгибаемом канате в предположении полного отсутствия сил трения. Рассматривая теперь сочетание прямого и изогнутого на блоке каната (рис. 75), легко убедиться в том, что

эти смещения распространяются в прямую ветвь каната, под действием сил трения как-то затухают, вызывая перераспределение натяжений в его элементах.

В общей постановке исследование этого процесса в канатах представляет собой довольно сложную проблему. Если при растяжении или кручении, как при осесимметричных деформациях, геометрически равноправные элементы в одном слое каната можно было принять равноправными и в силовом отношении, сократив таким образом число уравнений, то здесь фактор силового равноправия отпадает, и для каждого из них необходимо рассматривать свою систему уравнений статики. Таким образом, число систем уравнений статики (уравнений Кирхгофа) будет в точности равно числу элементов в канате. Точное решение такой задачи под силу только современным электронно-вычислительным машинам.

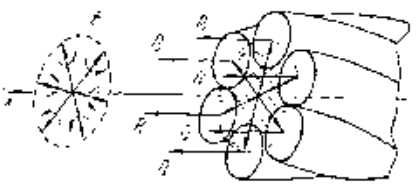


Рис. 76. Симметричное растяжение каната.

Первую попытку теоретического решения этой задачи находим в работе С. Т. Сергеева [87], который ограничился в последующем [88, 89] рассмотрением только однослойного шестипрядного каната при следующих основных допущениях: 1) канат состоит из абсолютно гибких упруго растяжимых элементов; 2) смещения, определяемые формулой (VI.30), воздействуют только на прямую ветвь каната; 3) канат представляется также абсолютно гибким элементом.

Затухание смещений в прямой ветви каната определяется в этих работах по уравнению Эйлера для равновесия к натянутой нити на шероховатой цилиндрической поверхности, выраженному в перемещениях.

Кроме перечисленных ограничений, недостатком этого решения является то, что автором не были исчерпывающе сформулированы условия совместности деформаций всех элементов в канате. Однако полученные таким образом результаты в общем сообразуются с экспериментальными данными и дают интересные сведения о переходных процессах, происходящих при формировании изогнутого каната в области набегания его на блок.

Для того чтобы уяснить происходящие при этом явления, рассмотрим предварительно несимметричное растяжение прямого каната, изложенное ранее в работе автора [31].

Натяжения в отдельных элементах каната P_{ki} относительно центра его поперечного сечения (рис. 76) создают систему векторов изгибающих моментов с главным вектором

$$\bar{\xi} = \sum [\bar{r}_i \bar{P}_{ki}]. \qquad \text{(VI.31)}$$

При симметричном нагружении всех элементов каната этот момент будет равен нулю. Если же какая-то прядь или группа прядей оказываются расслабленными ввиду местного дефекта каната, то центральная симметрия системы векторов ξ нарушается, появляется избыточный изги-

Рис. 77. Явление штопора в канате.

бающий момент, и канат должен изогнуться. Поскольку же канат образуется вращательным винтовым движением его поперечного сечения, то система векторов в этом смысле также вращается при поступательном движении вдоль оси каната. Вместе с этим вращается и неуравновешенный избыточный изгибающий момент. Вращение оси изгиба каната придает ему внешнюю винтовую форму штопора (рис. 77).

В однослойном канате шаг штопора равен шагу свивки каната

$$h_{шт} = h_к = 2\pi r \operatorname{ctg} \alpha.$$

В многослойном канате шаг штопора следует искать из силового взаимодействия всех слоев проволок или прядей.

Ограничимся рассмотрением однослойного каната. Центр осевых сил в штопоре остается на одной прямой линии действия общего осевого усилия в канате T до и после участка штопора. Этот центр сил будем называть упругим центром каната. Геометрический центр каната в штопоре смещается относительно его упругого центра на некоторую величину e (рис. 78). Геометрическая ось каната принимает

форму винтовой линии с радиусом e и шагом h. По этим данным находим угол штопора как для винтовой линии из уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\pi e}{h}. \qquad \text{(VI.32)}$$

Величина этого угла вместе со смещением e получается малой настолько, что можно положить

$$\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma;\ \cos\gamma = 1.$$

Отсюда находим кривизну винтовой оси каната в штопоре

$$\frac{1}{\rho_{шт}} = \frac{\sin^2\gamma}{e} = \frac{e}{r^2}\operatorname{tg}^2\alpha, \quad \text{(VI.33)}$$

или

$$e = \frac{r^2}{\rho_{шт}}\operatorname{ctg}^2\alpha. \qquad \text{(VI.34)}$$

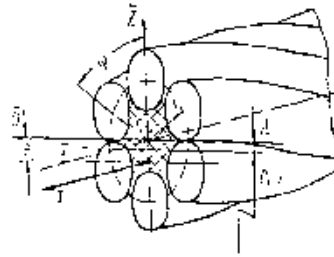


Рис. 78. К расчету изгибающего момента в штопоре.

Так как вектор кривизны каната в штопоре вращается вместе с его поперечным сечением, то ось каждого элемента каната остается постоянно ориентированной относительно радиуса кривизны штопора, т. е. остается все время со стороны вогнутости или со стороны выпуклости каната, и компенсации смещений как при плоском изгибе, не происходит. Поэтому в системе координат x, y, z, вращающейся относительно оси каната вместе с вектором кривизны штопора, угол φ в выражении (VI.28) следует считать постоянным. Тогда относительное удлинение

$$\varepsilon_3' = \frac{r}{\rho_{шт}}\cos^2\alpha\cos\varphi$$

вызывает дополнительные натяжения в элементах каната от штопора.

Несимметричное нагружение каната может вызвать большее общее осевое удлинение каната, чем при той же, но симметричной нагрузке. Это дополнительное удлинение оси каната можно представить через смещение Δ его нейтральной оси в сторону вогнутости, что в общем запишется так

$$\varepsilon_{шт} = \frac{\Delta + r\cos\varphi}{\rho_{шт}}\cos^2\alpha. \qquad \text{(VI.35)}$$

Полное натяжение в элементе каната

$$P_i^{(i)} = EF(\varepsilon_i + \varepsilon_{\text{шт}}^{(i)}). \qquad \text{(VI.36)}$$

Здесь ε_i — относительное удлинение, вызванное внешним несимметричным воздействием, без учета штопора, которое представим как сумму:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}_i,$$

где ε_0 — деформация в случае симметричного нагружения каната той же нагрузкой;

$\tilde{\varepsilon}_i$ — избыточная часть деформации.

Соответственно

$$P_i^{(i)} = P_i^0 + \tilde{P}_i^{(i)}, \qquad \text{(VI.37)}$$

где

$$\tilde{P}_i^{(i)} = EF(\tilde{\varepsilon}_i + \varepsilon_{\text{шт}}^{(i)}). \qquad \text{(VI.38)}$$

При этом очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{P}_i^{(i)} = 0. \qquad \text{(VI.39)}$$

Отсюда, принимая во внимание (VI.35), находим смещение нейтральной оси

$$\Delta = \frac{\ell_{\text{шт}}}{m\cos^2\alpha} \sum_{i=1}^{m} \tilde{\varepsilon}_i - \frac{r}{m} \sum_{i=1}^{m} \cos\varphi_i. \qquad \text{(VI.40)}$$

Вторая сумма для симметричного каната равна нулю.

Изгибающий момент штопора (VI.31) вызван только избыточной нагрузкой (VI.38) и будет уравновешиваться изгибающим моментом от эксцентричного приложения осевого натяжения T и моментом от изгибной жесткости каната:

$$\cos\alpha \sum_{i=1}^{m} \tilde{P}_i^{(i)} r \cos\varphi_i = eT + \frac{1}{\ell_{\text{шт}}} G. \qquad \text{(VI.41)}$$

Проволоки или пряди в канате расположены со сдвигом по φ на $2\pi/m$, где m — число проволок. Поэтому можно записать общую формулу:

$$\varphi_i = \varphi_1 + (i-1)\frac{2\pi}{m}; \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m). \qquad \text{(VI.42)}$$

Учитывая полученные ранее выражения, из уравнения (VI.41) находим

$$\frac{1}{\rho_{\text{вит}}} = -\frac{\mathrm{Z}EFr\cos\alpha}{r^2(EF\cos^3\alpha\psi + T\operatorname{ctg}^3\alpha) + G^2}, \qquad \text{(VI.43)}$$

где при $m > 2$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Z} &= \sum_{i=1}^{m} \bar{\varepsilon}_i \cos\varphi_i; \\ \psi &= \sum_{i=1}^{m} \cos^2\varphi_i - \frac{m}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.44)}$$

Если некоторые элементы каната вообще не работают, то

$$\psi = \frac{m}{2} - \sum \cos^2\varphi_i, \qquad \text{(VI.45)}$$

где сумма составляется по всем выброшенным элементам.

Преобладающее значение в знаменателе формулы (VI.43) играет первый член, поэтому упрощенно ее можно записать так:

$$\frac{1}{\rho_{\text{вит}}} = -\frac{\mathrm{Z}}{\psi r\cos^2\alpha}. \qquad \text{(VI.46)}$$

Остается невыясненным начало отсчета углов φ_i. Для этого следует принять во внимание, что изгибающий момент в канате относительно оси y, перпендикулярный оси изгиба каната, равен нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{P}_i^{(a)} \cos\alpha r \sin\varphi_i = 0. \qquad \text{(VI.47)}$$

Так как при $m > 2$ всегда

$$\sum_{i=1}^{m} \sin\varphi_i \cos\varphi_i = 0,$$

то отсюда следует:

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\varepsilon}_i \sin\left[\varphi_1 + (i-1)\frac{2\pi}{m}\right] = 0. \qquad \text{(VI.48)}$$

Зная несимметричное воздействие на канат в виде $\bar{\varepsilon}_i$, находим начальное положение угла φ_1 в сечении каната.

Рассмотрим явления формирования изогнутого каната на блоке. Смещения (VI.30) в точке набегания на блок

представляют собой явно неосесимметричное воздействие на канат со стороны блока, приводящее к описанному выше явлению штопора.

Для определения углов φ_0 введем такую упрощенную схему. Допустим, что крайнее сечение прямой ветви каната в точке соприкосновения с блоком закреплено жестко, а затем это сечение уходит на блок по мере набегания каната. Полярные углы, фиксирующие положение элементов каната в закрепленном сечении, определяются согласно (VI.42):

$$\varphi_i^c = \varphi_1^c + (i-1)\frac{2\pi}{m}.$$

Формула (VI.30) в результате перепишется так:

$$\zeta_i = B\left\{\cos\left[\varphi + (i-1)\frac{2\pi}{m}\right] - \cos\left[\varphi_i^c + (i-1)\frac{2\pi}{m}\right]\right\}, \quad \text{(VI.49)}$$

где

$$B = -\frac{r^2}{R}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

В уравнении (VI.49) φ — текущая координата в точке набегания на блок для первого элемента каната, от которого принят порядок отсчета индекса i.

Длина пути вдоль оси каната x_s выражается через полярный угол φ независимо от индекса i:

$$x_s = r(\varphi_i - \varphi_i^c)\operatorname{ctg}\alpha.$$

При набегании каната на блок его закрепленное сечение уходит от точки набегания на все большее расстояние x_s, характеризующееся значением угла φ_1 в этом сечении. Поэтому по мере набегания каната на блок угол φ_1 изменяется от φ_1^c до любых значений, включая и точки

$$\varphi_1 = \varphi_1^c + 2k\pi; \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

соответствующие набежавшей длине, кратной целому шагу свивки. При этом все смещения обращаются в нуль:

$$[\zeta_i(\varphi)]_{\varphi = \varphi_0 + 2k\pi} = 0,$$

т. е. поперечные сечения каната, находящиеся на блоке и отстоящие от закрепленного конца на целое число шагов свивки, не имеют смещений и остаются плоскими.

В точках

$$\varphi_1 = \varphi_1^c + (2k-1)\pi,$$

отстоящих от закрепленного конца каната на целое нечетное число полушагов свивки, все смещения удваиваются:

$$\zeta_{i\,max} = -2B\cos\varphi_i^{\circ}, \qquad (VI.50)$$

и поперечные сечения каната испытывают максимальную депланацию.

Затухания смещений в прямой ветви каната можно свести к задаче о равновесии натянутой гибкой нити на шероховатой поверхности. Для этого, пренебрегая поперечными силами в элементе каната ввиду достаточной для этого допущения его гибкости, из третьего уравнения системы (I.58) можно получить

$$\frac{dP_t^{(i)}}{ds} = -f_t^{(i)} = -\mu f_n^{(i)},$$

где f_t — распределенная осевая нагрузка, действующая на элемент каната, вызванная силами трения;

f_n — нормальное давление на элемент каната;

μ — коэффициент трения.

При тех же допущениях из первого уравнения этой системы (I.58), пренебрегая кривизной ветви каната (VI.25), получим

$$f_n = -P_t\frac{\sin^2\alpha}{r}.$$

Отсюда получаем известное уравнение Эйлера для равновесия нити на шероховатой поверхности

$$\frac{dP_t^{(i)}}{ds} = \nu_i P_t^{(i)}, \qquad (VI.51)$$

где

$$\nu_i = \pm\mu\frac{\sin^2\alpha}{r}.$$

Знак в этом уравнении выбирается по знаку скорости смещений, которая с точностью до постоянного положительного множителя определяется производной

$$\frac{d\zeta_i}{d\varphi} = B\sin\varphi_i. \qquad (VI.52)$$

Общим интегралом этого уравнения будет

$$P_t^{(i)} = P_t^{\circ} + \tilde{P}_t^{(i)} = C_i e^{\nu s}. \qquad (VI.53)$$

Дальнейшее решение задачи с учетом совместности деформаций элементов приводит к сложной, трудно разрешимой системе трансцендентных уравнений. Поскольку же задача в такой упрощенной постановке все же остается во многом мало определенной, то целесообразно упростить решение. Для этого естественно предположить, что дополнительные усилия $\bar{P}_i^{(i)}$ все же малы по сравнению с начальным натяжением P_i^0. Это допускает упрощение уравнения (VI.51):

$$\frac{dP_i^{(i)}}{ds} - \frac{d\bar{P}_i^{(i)}}{ds} = \nu_i P_i^0, \qquad \text{(VI.54)}$$

откуда следует

$$\bar{P}_i^{(i)} = \nu_i P_i^0 s + C_i, \qquad \text{(VI.55)}$$

где C_i — производная постоянная.

Координату оси элемента s будем отсчитывать от поперечного сечения каната в точке набегания на блок в сторону его прямой ветви. Подставив это выражение в формулу (VI.41), находим:

$$\frac{1}{\rho_{\text{шт}}} = \beta_i s + \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i \cos\varphi_i, \qquad \text{(VI.56)}$$

где

$$\beta_i = \lambda P_i^0 \sum_{i=1}^{m} \nu_i \cos\varphi_i; \qquad \text{(VI.57)}$$

$$\lambda = \frac{r\cos\alpha}{r^2 T \operatorname{ctg}^2\sigma + \bar{G}^{-}}. \qquad \text{(VI.58)}$$

Согласно (VI.35), (VI.38), (VI.40) уравнение (VI.55) можно записать так:

$$P_i^{(i)} = EF\left(\frac{d\zeta_i}{ds} + \frac{r}{\rho_{\text{шт}}}\cos^2\alpha\cos\varphi_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{d\zeta_i}{ds}\right) =$$
$$= \nu_i P_i^0 s + C_i, \qquad \text{(VI.59)}$$

где ζ_i — смещения на прямом участке.

Отсюда следует

$$\frac{d\zeta_i}{ds} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{d\zeta_i}{ds} + L_i s + C_i' - \frac{r}{\rho_{\text{шт}}}\cos^2\alpha\cos\varphi_i, \qquad \text{(VI.60)}$$

где

$$L_i = \frac{\nu_i p^2}{EF}; \quad C_i' = \frac{C_i}{EF}.$$

В поперечном сечении каната в точке его набегания на барабан при $s = 0$ смещения ζ_i равны $\zeta_i(0)$ из (VI.49) или (VI.50) и удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m} \zeta_i(0) = B \sum_{i=1}^{m} \cos\varphi_i = 0.$$

Поэтому после интегрирования выражения (VI.60) получим:

$$\zeta_i = \zeta_i(0) + \frac{L_i}{2} s^2 + C_i' s - r^2 \cos^2\alpha \cos\varphi_i \int \frac{ds}{\rho_{\text{ш}}} + \sum_{i=1}^{m} \zeta_i, \quad \text{(VI.61)}$$

где $\zeta_i(0)$ выступает в роли произвольного постоянного.

Произвольные постоянные C_i находим из условия, что в некоторых точках $s = s_i$ эти смещения затухают, что приводит к следующим двум системам алгебраических уравнений:

$$(\tilde{\zeta}_i)_{s=s_i} = 0, \quad \left(\frac{d\tilde{\zeta}_i}{ds}\right)_{s=s_i} = 0. \quad \text{(VI.62)}$$

Отсюда находим m произвольных постоянных C_i и столько же точек затухания s_i.

Из упрощенной постановки становится ясной вся сложность точного в пределах общепринятых допущений решения данной задачи. Ход решения при учете затуханий по экспоненте (VI.53) остается тем же, только это приводит к трансцендентным уравнениям.

§ 40

СМЕЩЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ ПРИ ИЗГИБЕ И ХАРАКТЕРНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ДЕФЕКТЫ В КАНАТАХ

Не рассматривая самого решения задачи о переходных процессах, происходящих при формировании изогнутого каната во время его набегания на блок, до конца, из общих соображений можно сделать ряд важных выводов качественного характера, объясняющих многие наблюдающиеся на практике явления.

Одному и тому же по величине смещению $\xi_1(0)$ соответствуют два направления скорости скольжения при движении в прямом и обратном направлении. Так, например, элемент каната вначале выдвигается в прямую ветвь, затем возвращается в исходное положение. За все это время смещение имеет один знак, а скорость при возвратном движении и направление сил трения изменяют свой знак на обратный. Поэтому процесс возвратного движения зависит от предшествовавшего прямого движения и т. д.

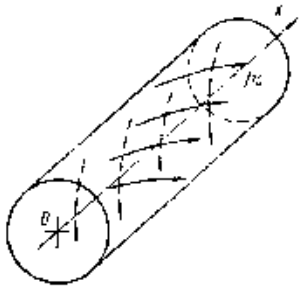


Рис. 79. Направление сил трения, действующих на слой проволок в точке набегания каната на блок.

Сказанное исключает возможность изолированного рассмотрения какого-то промежуточного положения каната при его набегании на блок и требует последовательного решения задачи для отдельных, связанных друг с другом интервалов движения, в которых скорость имеет один знак, начиная с начального момента движения условно закрепленного сечения каната на блок. Поскольку же знак скорости скольжения изменяется на каждые полшага движения каната, то для изучения сколько-нибудь отдаленного момента движения каната потребуется рассмотреть огромное количество отдельных интервалов. В том случае, когда это явление не учитывается, то по существу рассматривается только трогание с места, когда направления смещений и скоростей скольжений совпадают.

Процесс, таким образом, не повторяется на каждом набежавшем на блок шаге свивки каната, но в общем следует ожидать, что он асимптотически стремится к некоторому периодическому движению. Это дает основание предполагать, что под действием сил трения в канате происходят необратимые процессы, накопление которых может привести к образованию остаточных структурных сдвигов в виде определенных дефектов.

Обращает на себя внимание также то обстоятельство, что при обходе по контуру слоя проволоки скорость скольжения (VI.52) симметрично изменяет свое направление: для одной половины проволок она положительна, а для другой —

отрицательна. Такой же характер распределения имеют и силы трения. Поэтому результирующая сила трения, действующая на слой проволоки в целом, ввиду определенной асимметрии их смещений стремится к нулю (рис. 79). Это значит, что слои проволок или прядей в многослойном канате на этом участке теряют свое взаимодействие посредством сил трения, т. е. становятся как бы свободными в относительных послойных смещениях.

Стремление слоев каната к взаимному смещению может быть обусловлено переменным осевым усилием или крутящим моментом. Если в слое проволок или прядей действуют переменное усилие T_i и момент M_i, то они могут быть уравновешены только силами трения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT_i}{dx} &= A_i \frac{d^2u}{dx^2} + C_i \frac{d^2v}{dx^2} - f_{(y)i} \\ \frac{dM_i}{dx} &= C_i \frac{d^2u}{dx^2} + B_i \frac{d^2v}{dx^2} - m_{(y)i} \end{aligned}\right\} \qquad (VI.63)$$

где смещения u и v общие для всех слоев каната на прямом участке.

Поскольку в окрестности точки набегания на блок результирующие силы трения становятся равными нулю, то здесь при

$$\frac{dT_i}{dx} = 0; \qquad \frac{dM_i}{dx} = 0$$

и происходит выравнивание напряжений, сопровождающееся относительно упругим смещением слоев каната.

Следовательно, для реализации послойных смещений остается выяснить условия возникновения переменной нагрузки по длине каната. С одной стороны, это вызвано переменным скручиванием каната при набегании на блоки и барабаны (§ 38), а с другой,— внутренней тангенциальной контактной нагрузкой (V.85), которая пропорциональна кривизне каната (VI.25) и изменяется вместе с изменением последней.

В качестве примера рассмотрим для этого внутренние контактные силы в канате ТК $6 \times 37 + 1$ МС с металлическим сердечником в виде пряди при $d = 29{,}5$ *мм*, $\delta = 1$ *мм*, $\beta = 16°$. При средних напряжениях $\sigma = 30$ *кГ/мм²* общее осевое усилие в канате $T = 6100$ *кГ*, натяжение в прядях $P_i^{\circ} = 870$ *кГ*. Изгибная жесткость каната, определенная по формуле (V.88), с учетом металлического сердечника при этих напряжениях

$$G = 2940 + 4005 \approx 15\,000 \text{ кГ} \cdot \text{см}^2.$$

Осевое контактное усилие и момент из (V.79), (V.80) и (V.83) как для однослойного каната

$$T_к = \frac{3560}{R_{(см)}}\ кГ; \quad M_к = \frac{9560}{R_{(см)}}\ кГ \cdot см.$$

Тогда в соответствии с формулой (VI.27) в точке набегания на блок получим:

$$\frac{dT_к}{dx} = -\frac{3560}{R}\sqrt{\frac{T}{G}} = -\frac{2280}{R_{(см)}}\ кГ/см;$$

$$\frac{dM_к}{dx} = -\frac{9560}{R}\sqrt{\frac{T}{G}} = -\frac{6100}{R_{(см)}}\ кГ.$$

Отрицательные производные означают, что внутренняя контактная нагрузка убывает по мере удаления от точки набегания на блок в прямую ветвь каната. Эта нагрузка, действующая на слой прядей, вызывает растяжение и раскручивание каната и посредством сил трения передается на металлический сердечник. Поскольку же силы трения, действующие на сердечник, взаимно уравновешены, то междуслойное взаимодействие в канате нарушается, и слой прядей получает упругие смещения относительно сердечника. Под действием силы $T_к$ и раскручивающего момента $M_к$ слой прядей удлиняется, а соответствующая этому удлинению длина металлического сердечника увлекается его вытягиванием из прямой ветви каната. Получается, таким образом, что через блок стремится перебежать бо́льшая длина сердечника, чем длина слоя прядей. Геометрически это можно представить так, что нейтральные оси, т. е. линии, на которых длина при изгибе остается неизменной, для металлического сердечника и для слоя прядей расположены на различных радиусах и смещены друг относительно друга на некоторую величину e. Тогда разность перебежавших через блок длин сердечника и слоя прядей выразится так:

$$\Delta l = -\frac{e}{R}\, l = e\varphi, \qquad \text{(VI.64)}$$

где l — перебежавшая через блок длина каната;

φ — угол поворота блока.

Определение смещения нейтральной оси e требует изучения силового взаимодействия сердечника и слоя прядей на всем протяжении участка формирования изогнутого каната и пока не поддается точному расчету. О том, что

такое явление существует, показывает следующий простой опыт.

Смещение нейтральной оси изгиба каната в сторону его вогнутости хорошо интерпретируется плотно свитой винтовой пружиной. С учетом этого свойства пружины был изготовлен составной гибкий элемент (рис. 80) из пружины *1* с вложенным внутрь стальным канатом *2*. Пружина, таким образом, имитирует наружный слой каната с преувеличенными свойствами относительно смещения нейтральной оси, а стальной канат — металлический сердечник.

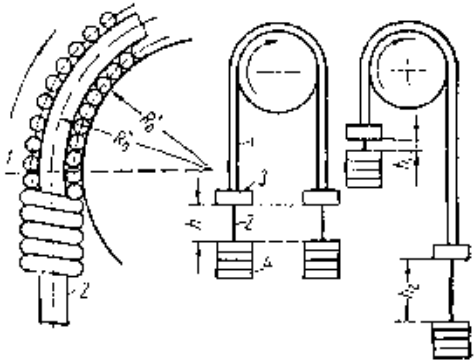


Рис. 80. Схема экспериментальной установки для определения смещения нейтральной оси.

С целью беспрепятственного относительного смещения концы каната и пружины не скреплены и нагружены отдельными грузами *3* и *4*. При перебегании через блок такого составного гибкого элемента начальное расстояние h между концами каната и пружины заметно изменяется, причем в набегающей ветви оно уменьшается до h_1, а в сбегающей увеличивается до h_2. При обратном движении картина симметрично повторяется.

Следовательно, при перебегании через блок канат опережает пружину. Смещение нейтральной оси пружины происходит, можно считать, до линии тангенциального контакта ее витков со стороны вогнутости и не зависит от нагрузки на канат.

Основные данные экспериментальной установки следующие: диаметр блока $D = 98$ *мм*; внешний диаметр пружины 12 *мм*; диаметр проволоки пружины 1,4 *мм*; диаметр каната $d = 6{,}3$ *мм*; конструкция каната 7×37.

По данным измерений на длине перебегания через блок $l = 2$ *м* опережение каната составило 15–16 *см*. Эта величина поддается элементарному расчету следующим образом.

Нейтральную ось изгиба пружины можно отнести на уровень контакта витков со стороны вогнутости, а для каната — на уровень его геометрической оси. Тогда смещение нейтральных осей

$$R_0'' - R_0' = e = 3{,}85 \text{ мм}.$$

Соответственно по условиям данного опыта получим

$$\Delta l = e\frac{2l}{D} = 3{,}85 \cdot \frac{2 \cdot 2000}{98} = 157 \text{ мм},$$

что практически совпадает с результатами наблюдений.

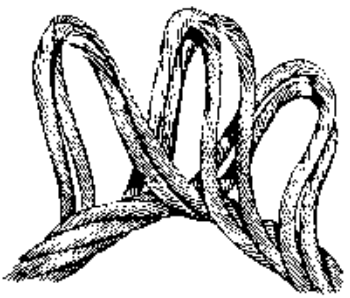


Рис. 81. Выпучивание верхнего слоя прядей в канате 7 × 37.

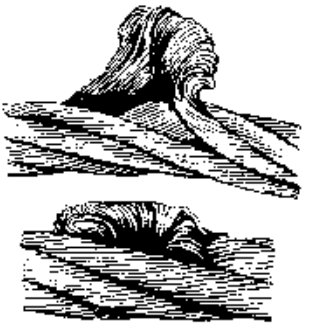


Рис. 82. Выход металлического сердечника в канате 7 × 37.

Кроме влияния внутренних контактных сил, смещение нейтральной оси происходит и в штопоре при формировании изогнутого каната, что показано формулой (VI.40).

Все это вместе взятое объясняет многие дефекты, наблюдающиеся на практике в многослойных канатах и в канатах с металлическим сердечником в виде остаточных нарушений его структуры, наступающих часто далеко до исчерпания нормального срока службы каната.

На рис. 81 показано выпучивание всех шести прядей в канате 7 × 37 по ГОСТ 3068—55 диаметром 55 *мм* на скиповом подъеме ствола «Новый» шахты №17—17-бис треста «Рутченковуголь» в Донбассе. Выпучивание произошло после некоторой работы каната на расстоянии 1,7 *м* от верхнего жимка запанцировки каната у скипа.

Такие случаи в канатах с металлическим сердечником этого типа наблюдаются неоднократно и часто приводят к разрыву сердечника. На рис. 82 показан выход метал-

лического сердечника на поверхность в канатах такого же типа и его раздавливание на шкиве и барабане на шахтах «Октябрьская» и «Саксагань» в Кривом Роге.

Оба эти явления — выпучивание наружных прядей и выход сердечника на поверхность — имеют одну и ту же природу и взаимно обусловлены. При подъеме груза через шкив переходит бо́льшая длина сердечника, чем слоя прядей, в обратном направлении сердечник должен вернуться в исходное положение. Однако смещение сердечника пропорционально внутренней контактной нагрузке, которая зависит от натяжения каната.

В шахтном подъеме натяжение каната при подъеме груза намного больше, чем при опускании пустого сосуда. Поэтому за цикл подъема смещение сердечника при набегании поднимающейся ветви каната на копровый шкив больше, чем при опускании, а положение сердечника, таким образом, не восстанавливается, а, наоборот, смещения накапливаются. В результате накопления смещения на конце каната, со стороны подъемного сосуда, сердечник получается коротким, а на противоположном конце, со стороны барабана, сердечник имеет лишнюю длину и сжимается. Иногда сжатие сердечника достигается настолько больших величин, что он теряет устойчивость в довольно стесненных условиях и, раздвигая внешние пряди, выходит наружу каната. Ясно, что для такого нарушения структуры каната требуются огромные сжимающие усилия в сердечнике.

Местный выход сжатого металлического сердечника на поверхность каната удается воспроизвести на опыте при сильном закручивании каната, которое сопровождается его укорочением, что после накопления определенного кручения происходит мгновенно с эффектом взрыва. Недостача длины сердечника в канате на противоположной части каната со стороны груза приводит к местному выпучиванию всех внешних прядей.

Аналогичные дефекты наблюдаются при работе канатов с металлическим сердечником на кранах.

В канатах с металлическим сердечником двойной или тросовой свивки вследствие его большей податливости эти явления наблюдаются значительно реже.

В статье В. Д. Белого и А. Ф. Самарского [6] описываются случаи структурных нарушений, свойственных шахтным многослойным закрытым канатам. Эти нарушения выражаются в виде остаточной волнистости в рабочей ветви

каната, чаще со стороны подъемного сосуда, и в виде местных утолщений каната, чаще со стороны барабана. Вырезка местных утолщений каната показывает, что внутренние слои в этих местах сильно сжаты и выпучиваются, т. е. наблюдается то же явление, что и при выходе металлического сердечника в обычных канатах. После разреза участка волнистости поперечное сечение не остается плоским, а слои проволок получают несимметричные смещения под действием упругой отдачи, напоминающие по характеру распределения смещения ξ_1 (см. рис. 75) в точке набегания на блок. Поэтому волнистость можно отнести, с одной стороны, к явлению смещения нейтральной оси, приводящему к выпучиванию внешнего слоя проволок, а с другой — к явлению остаточного штопора, возникающего в точке набегания каната на шкив.

Дальнейшее изучение этих явлений в намеченном аспекте поможет глубже вскрыть механизм данных явлений и выработать конструктивные или технологические мероприятия по ликвидации этих дефектов.

Для закрытых канатов требуется строгое выполнение уже известных конструктивных мероприятий в отношении уравновешенности внутренних крутящих моментов, возникающих от осевой нагрузки (§ 21). Дальнейшие разработки потребуют изучения возможности уравновешенности крутящих моментов от внутренней контактной нагрузки (§ 36), а также окончательной выработки условий совместности работы слоев проволок на шкивах и барабанах.

ГЛАВА 7

РАБОТА КАНАТОВ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ШАХТНОМ ПОДЪЕМЕ

§ 41
СТАТИКА ВЕРТИКАЛЬНОГО ОТВЕСА ТЯЖЕЛОГО КАНАТА

Все подъемные системы, построенные на принципе использования стального каната как гибкого тягового органа, можно разделить на принципиально различные группы: полиспастные системы и шахтный подъем. Полиспастные системы в крановых механизмах, в буровых установках и т. п. предназначены для подъема больших грузов на малую высоту. Полиспаст в этом случае служит механизмом для выигрыша в силе, на котором канат, огибая систему блоков, испытывает многократный перегиб.

В шахтном подъеме груз поднимается одной ветвью каната без всяких полиспастных систем на большую высоту, не сравнимую с высотой подъема в полиспастных подъемных системах. Так, в мировой практике, например в Южной Африке на алмазных рудниках, имеются подъемные установки на глубину до 2400 *м*, а такие глубины подъема, как 700—1500 *м* являются обычными в горной практике. К числу глубоких принято обычно относить подъемы на 700 — 800 *м* и выше.

При таких глубинах подъема собственная сила тяжести каната представляет уже существенную добавку к концевому грузу, а при глубине 1200 — 1400 *м* при современных разрывных сопротивлениях канатов и их запасах прочности они сравниваются, и далее собственная сила тяжести каната преобладает над поднимаемым грузом.

До сих пор в литературе при расчете шахтных подъемных канатов на статическую прочность собственная сила тяжести каната учитывалась как простая надбавка к осевому усилию от концевого груза.

где

$$T_0 = Q + \frac{pL}{2}; \quad T_c = p\frac{L-2x}{2}. \qquad \text{(VII.12)}$$

Крутящий момент в канате находим как одно из произвольных постоянных:

$$M = \frac{C}{\Delta} T_0. \qquad \text{(VII.13)}$$

Отсюда видно, что несмотря на закрепление обоих концов от вращения канат получает кручение, вызываемое только его собственным весом, независимо от величины концевого груза. При этом угол поворота каната изменяется по параболическому закону, имея максимум в середине вертикального отвеса (рис. 84) и обращаясь в нуль по его концам.

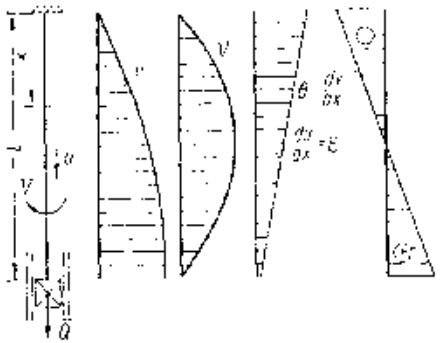


Рис. 84. Эпюры перемещений и деформаций шахтного подъемного каната.

Максимальный угол поворота при $x = \frac{L}{2}$ будет

$$\vartheta_{max} = -\frac{C}{\Delta} \cdot \frac{pL^2}{8}. \qquad \text{(VII.14)}$$

Деформация кручения каната изменяется по линейному закону, переходя через нуль в середине его отвеса. Максимальное кручение каната будет в его заделках и запишется так:

$$\theta_{max} = \pm \frac{C}{\Delta} \cdot \frac{pL}{2} = \pm \frac{4V_{max}}{L}. \qquad \text{(VII.15)}$$

Положительное кручение (закручивание) относится к нижнему, отрицательное (раскручивание) — к верхнему концу каната. Величина деформации кручения растет пропорционально глубине подъема.

Обращает на себя внимание также то обстоятельство, что деформации каната (VII.11) в любом его сечении можно представить в виде двух простых составляющих:

чистое растяжение усилием T_0

$$\varepsilon_1 = \frac{T_0}{\Delta}; \quad \theta_1 = 0; \qquad \text{(VII.16)}$$

растяжение свободно подвешенным грузом T_c

$$\varepsilon_2 = \frac{B}{\Delta} T_c; \quad \theta_2 = \theta = -\frac{C}{\Delta} T_c. \qquad \text{(VII.17)}$$

Таким образом, сложная нагрузка на канат представляется в виде двух более простых: свободного и чистого растяжения. Каждая из этих нагрузок была предметом детальных исследований в главах II и III, что позволило накопить необходимый материал для изучения работы канатов в шахтном подъеме.

Интересно также, что общее удлинение каната, т. е. продольное перемещение его нижнего конца, не зависит от его кручения и определяется так же, как и для сплошного стержня:

$$u(L) = \frac{QL}{A} - \frac{pL^2}{2A},$$

которое получается как из (VII.3), так и из (VII.10) при $x = L$.

Наибольшее относительное удлинение каната будет в верхнем сечении при $x = 0$:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{T_0}{A} + \frac{B}{\Delta} \cdot \frac{pL}{2}.$$

Для нижнего сечения при $x = L$ получим

$$\varepsilon(L) = \frac{T_0}{A} - \frac{B}{\Delta} \cdot \frac{pL}{2}. \qquad \text{(VII.18)}$$

Как видим, при определенных условиях осевая деформация каната на его нижнем конце может быть отрицательной или равной нулю. Исследуем эту возможность. Приравняв в (VII.11) $\varepsilon(x) = 0$, найдем координату x_0, в которой осевая деформация отсутствует:

$$x_0 = \frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2} + \frac{Q}{p}\right)\left(1 - \frac{C^2}{AB}\right). \qquad \text{(VII.19)}$$

Так как определитель

$$AB - C^2 > 0,$$

то

$$0 < 1 - \frac{C^2}{AB} < 1. \qquad \text{(VII.20)}$$

Поэтому при определенных величинах груза Q точка x_0 оказывается в пределах длины каната, т. е. $x_0 \leqslant L$. Это будет всегда при

$$\frac{Q}{pL} \leqslant \frac{2C^2}{AB - C^2}. \qquad \text{(VII.21)}$$

Ниже точки x_0 канат, несмотря на наличие концевого груза, испытывает относительное укорочение. Это объясняется тем, что на удлинение каната от груза в нижней его половине накладывается отрицательное относительное удлинение от закручивания, которое может быть больше первого.

Очевидно, в точке x_0 осевое перемещение каната будет наибольшим:

$$u(x_0) = u_{max}, \qquad \text{(VII.22)}$$

так как его производная $\varepsilon(x_0)$ в этой точке обращается в нуль.

Для стержня наибольшее перемещение в этом случае будет всегда на нижнем конце. Таким образом, хотя канат и эквивалентный ему по продольной жесткости стержень имеют одинаковые перемещения в концевых точках, их деформации по длине имеют существенное различие.

Полную аналогию со стержнем мы получим только в случае уравновешенного каната, когда коэффициент $C=0$.

§ 42

КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ В КАНАТЕ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ШАХТНЫЕ ПРОВОДНИКИ

Крутящий момент в канате (VII.13) обусловлен реакцией направляющих, удерживающих груз от вращения. Его влияние хорошо известно в практике и проявляется в одностороннем износе шахтных проводников, а также в дополнительных сопротивлениях при движении груза. Коэффициент крутящего момента

$$k = \frac{C}{A},$$

как это было показано ранее (см. § 16), пропорционален диаметру каната и при его односторонней свивке намного больше, чем при крестовой. На рис. 85 показаны графики изменения коэффициента k для различных канатов типа $6 \times 37 + о.с.$

Давление на проводники P, вызванное этим моментом, очевидно,

$$P = \frac{M}{h}, \qquad \text{(VII.23)}$$

где h — расстояние между проводниками.

В системах с гибкими канатными проводниками крутящий момент в подъемном канате представляет опасность с точки зрения скручивания системы, что неоднократно наблюдалось на практике и приводило к авариям.

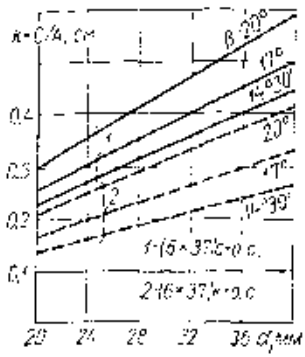


Рис. 85. График изменения коэффициента крутящего момента в канате 6 × 37 + о. с. крестовой (1) и односторонней (2) свивки.

Для уяснения этого обстоятельства рассмотрим следующий простой расчет. Представим груз, двигающийся в двух параллельных канатных проводниках (рис. 86). Под действием крутящего момента система поворачивается на угол φ. При этом проводник под действием силы

$$q = \frac{P}{\cos\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{(VII.24)}$$

отклоняется от вертикали на величину

$$y = cc' = h\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad \text{(VII.25)}$$

Упрощая рассуждения, рассмотрим наиболее опасный случай, когда груз находится в середине ствола шахты на высоте $L/2$.

Тогда из условия равновесия проводника под действием приложенной в середине поперечной силы q при малом прогибе находим

$$y = \frac{qL}{4S}, \qquad \text{(VII.26)}$$

где S — натяжение проводника.

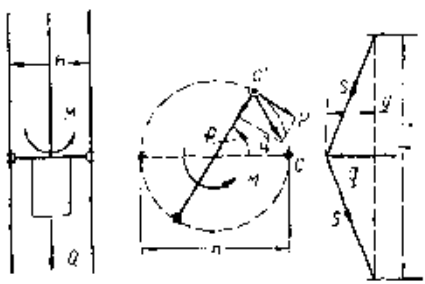


Рис. 86. Схема скручивания гибких канатных проводников.

Из этих выражений следует:

$$\sin\varphi = \frac{PL}{2hS} = \frac{kL}{2h^2}\cdot\frac{T_0}{S}. \qquad \text{(VII.27)}$$

Натяжение канатных проводников S можно принять для ориентировочного расчета равным 1 *т* на каждые 100 *м*

длины [4], т. е.

$$S = 10L\ (м),\ кГ.$$

Тогда формула (VII.27) перепишется так:

$$\sin\varphi = \frac{kT_0}{2Gh^2}.$$

Беря для примера $h = 1{,}2$ м и $k = 0{,}0036$ м как для каната односторонней свивки диаметром 39 мм при $T_0 = 15$ т, получим: $\sin\varphi = 1{,}87$.

Однако синус угла не может быть большим единицы, и поэтому данное выражение с формальной точки зрения теряет свой смысл. Что это означает физически? Так как выражение (VII.27) по существу есть уравнение статического равновесия системы, то выход параметров системы за пределы существования этого соотношения означает потерю устойчивости системы и выход ее из положения равновесия. При $\sin\varphi > 1$ равновесие системы в такой форме невозможно, поэтому она приходит в движение и скачкообразно переходит в новое равновесное состояние.

Это означает, что статический поворот системы гибких проводников под действием крутящего момента в подъемном канате происходит только в первую четверть оборота. После достижения поворота система дальше теряет устойчивость, и происходит скручивание канатных проводников.

Следовательно, для обеспечения устойчивой работы системы подъема с гибкими канатными проводниками необходимо, чтобы правая часть уравнения (VII.27) никогда не достигала единицы и была на необходимый запас устойчивости меньше нее, т. е.

$$\frac{kL}{2h^2} \cdot \frac{T_0}{S} < 1. \qquad \text{(VII.28)}$$

Наилучшим регулируемым параметром этого условия является коэффициент крутящего момента k, который вообще может быть сведен к нулю.

Для этого применяют специальные уравновешенные некрутящиеся канаты, а в многоканатном подъеме применяют четное число попарно противоположно свитых канатов.

Существующие двухслойные некрутящиеся канаты не обладают полной уравновешенностью, и поэтому для них необходим проверочный расчет по формуле (VII.28).

Нами для иллюстрации проведен элементарный статический расчет. Вообще вопрос скручивания системы гибких проводников требует динамического рассмотрения, что представляет собой важную для надежности работы подъема и довольно сложную математическую проблему. Проблема динамики гибких канатных проводников в последние годы получила свое развитие в трудах Г. И. Савина, О. А. Горошко [83] и др. Эта задача рассматривалась В. Д. Белым [4] без учета крутящего момента в подъемном канате в предположении полной уравновешенности последнего.

§ 43

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ КАНАТА В БАРАБАННОМ ПОДЪЕМЕ И В ПОДЪЕМЕ СИСТЕМЫ КЕЛЕ

Описанные выше деформации кручения шахтный подъемный канат получает под действием собственного веса в первый же спуск в ствол шахты. Допустим, что спуск каната завершен и его деформации приняли свое статическое состояние. Если после этого одно из промежуточных сечений каната в какой-то точке закрепить жестко и отбросить его верхнюю часть, то это не нарушит равновесного состояния оставшейся нижней части каната, причем эту точку можно рассматривать в движении вдоль каната. Представим теперь процесс подъема и навивки каната на барабан (длиной струны каната от копрового шкива до барабана пока пренебрегаем). Вследствие большого натяжения канат не имеет возможности прокручиваться на барабане. Навиваясь на барабан, канат сохраняет свою деформацию кручения неизменной, и процесс навивки на барабан можно рассматривать как равномерное перемещение его верхней точки закрепления вниз.

При этом деформации в набегающей ветви каната остаются неизменными, если координату x в этих выражениях отсчитывать не от подвижного закрепления, а от начального верхнего конца каната, ушедшего на барабан. При повторном спуске каната процесс его сматывания с барабана можно рассматривать как движение точки закрепления каната обратно вверх вдоль каната. Так как канат сматывается с барабана уже в деформированном состоянии, соответствующем первоначальному состоянию

свисающей его ветви, то этот процесс также не вносит никаких изменений в деформации вертикального отвеса каната. Таким образом, сколько бы процесс спуска-подъемов не повторялся, деформации вертикального отвеса каната при такой схеме рассуждений остаются во времени неизменными. Это свойственно барабанному подъему.

Переменное скручивание каната при его винтовой навивке на барабан, а также в связи с его изгибом и углами девиации на шкивах, рассматриваемое в предыдущей главе, выступает как независимая составляющая кручения каната.

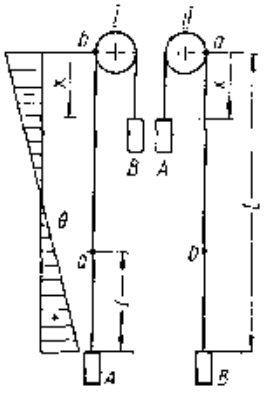


Рис. 87. Схема работы каната в подъеме системы Кеде.

Совершенно иную картину мы наблюдаем в подъеме системы Кеде с ведущим шкивом трения. Здесь, как это ясно из рис. 87, нагрузка на канат за цикл подъема изменяется так, как будто сила тяжести изменяет свое направление на обратное относительно каната: нижний конец каната a становится верхним, а верхний b — нижним. Поэтому в формуле (VII.11) знак перед p меняется на обратный, что для крайних положений можно записать так:

$$\theta = \pm \frac{C}{\Delta} p \frac{L - 2x}{2},$$

где координату x следует всегда отсчитывать от верхнего конца рассматриваемой ветви каната.

Таким образом, каждый элемент каната испытывает симметричное знакопеременное скручивание. Это существенно отличает подъем системы Кеде от барабанного подъема. Более подробно это можно представить так. Отбросим влияние участка каната, не переходящего через шкив, полагая его пренебрежимо малым по сравнению с вертикальным отвесом L опущенной ветви каната. Зафиксируем, например, в левом крайнем положении каната точку с координатой x_1, отсчитываемой сверху. В правом крайнем положении каната эта точка будет иметь координату x_2, отсчитываемую сверху, и x_1, отсчитываемую теперь снизу. При этом видно, что

$$x_1 + x_2 = L. \qquad \text{(а)}$$

Деформации в этой точке в каждом крайнем положении определяются по формулам (VII.11) путем подстановки вместо x соответственно x_1 или x_3. Поэтому в соответствии с выражением (а) эти формулы можно записать на общий случай так:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{T_0}{\Lambda} \pm \frac{B}{\Delta}\, p\, \frac{L-2x_1}{2}; \\ \theta &= \mp \frac{C}{\Delta}\, p\, \frac{L-2x_1}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.29)}$$

где верхний знак относится к левому верхнему положению каната, в котором координата x_1 отсчитывается сверху, нижний — к противоположному положению.

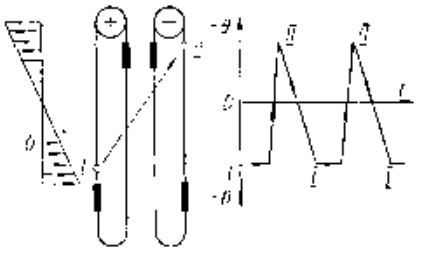


Рис. 88. График изменения кручения каната в подъеме системы Кепе.

Найденные выражения дают нам амплитудные значения деформаций; их промежуточные значения при переходе каната через шкив не превышают этих значений. Для уяснения сказанного рассмотрим, например, на канате точку a (рис. 87) вблизи груза A. В положении I эта точка находится в зоне положительного кручения. При подъеме левой ветви вверх канат накладывается на шкив без каких-либо изменений в углах поворота. Деформации кручения в поднимающейся части ветви остаются неизменными на весь период подъема до тех пор, пока эта точка не перейдет через шкив в опускающуюся ветвь. Как только точка a перейдет через шкив в положение II, кручение каната в этой точке резко изменяет свое направление на противоположное. При обратном движении из положения II в I кручение изменяется плавно, достигая начального значения. Примерный график изменения кручения каната в точке a показан на рис. 88.

Остается невыясненным вопрос влияния части каната l, не переходящей через шкив. При малых отношениях l/L влияние участка l будет, конечно, несущественным.

Предыдущие формулы выведены в предположении, что на верхнем конце угол поворота каната равен нулю (VII.5). Влияние участка l будет таково, что угол поворота каната

в его верхнем сечении не будет равен нулю даже в крайних положениях.

Пусть точка a (см. рис. 87) последней переходит через шкив в левой поднимающейся ветви; она будет верхней точкой в правом крайнем положении каната. В левом крайнем положении угол поворота каната в точке a не равен нулю и определяется при $x = L - l$ так:

$$v_a = \frac{C}{\Delta} p \frac{L-l}{2} l.$$

Этот угол поворота согласно с (VII.29) входит с обратным знаком в граничные условия на верхнем конце противоположной опущенной ветви каната, вызывая в нем дополнительные повороты сечений, не учитываемые предыдущими формулами. При этом угол v_a изменяется за каждый цикл подъема, и периодичность повторения деформаций нарушается.

Рассмотрим положение I в некотором i-м цикле подъема. Пусть под влиянием участка l на верхнем конце каната угол поворота равен φ_i. Остальные граничные условия мы вправе оставить без изменения.

Найденный при этом угол поворота ветви каната I

$$v_i = -\frac{C}{\Delta} p \frac{L-x}{2} x + \varphi_i \frac{L-x}{L}. \qquad (б)$$

При переходе в положение II на верхнем конце каната получаем угол поворота φ_{i+1}. Этот угол поворота мы должны взять из формулы (б) с обратным знаком для точки $x = L - l$ — последней переходящей через шкив из положения I.

Отсюда получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\varphi_{i+1} = \alpha + \mu\varphi_i, \qquad (VII.30)$$

где

$$\alpha = \frac{C}{\Delta} p \frac{L-l}{2} l; \quad \mu = -\frac{l}{L}.$$

Последовательным применением этой формулы находим:

$$\varphi_i = \alpha(1 + \mu + \mu^2 + \ldots + \mu^{i-2}) + \mu^{i-1}\varphi_1.$$

Ряд в скобках есть убывающая геометрическая прогрессия ($\mu < 1$), сумма которой

$$S = \frac{1-\mu^{i-2}}{1-\mu}.$$

Отсюда следует общая формула

$$\varphi_i = \alpha \frac{1-\mu^{i-2}}{1-\mu} + \mu^{i-1} \varphi_1. \qquad \text{(VII.31)}$$

Ввиду обычно малых значений μ по сравнению с единицей при достаточно большом номере подъема можно перейти к пределу, когда $i \to \infty$. Формула (VII.31) при этом принимает вид

$$\varphi_i = \frac{\alpha}{1-\mu} = \text{const}, \qquad \text{(VII.32)}$$

т. е. в пределе процесс стремится к периодическому, независимо от начальных условий при навеске, определяемых углом φ_1.

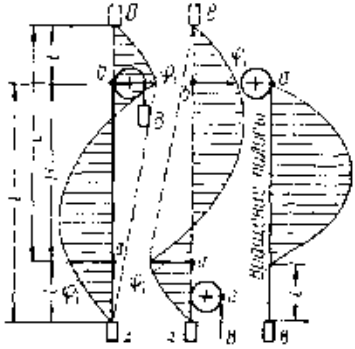


Рис. 89. График распределения кручения каната в подъеме системы Кепе.

Установившийся угол поворота опущенной ветви каната с учетом влияния участка l для любого цикла работы подъема запишется согласно (6) и (VII.32) окончательно так:

$$v = -\frac{C}{\Delta} \cdot p\left(x - \frac{L-l}{L+l} l\right) \frac{L-x}{2}. \qquad \text{(VII.33)}$$

Деформация кручения каната

$$\theta = -\frac{C}{\Delta} \cdot p\left(L - 2x + \frac{L-l}{L+l} l\right). \qquad \text{(VII.34)}$$

Отсюда легко подсчитать, что при $l/L = 0{,}1$, т. е. при реальной величине для шахт средней глубины, поправка на максимальные деформации в крайних сечениях каната вследствие влияния участка l будет незначительной.

Исследование на максимум показывает, что наибольшее влияние участка l будет при

$$l = (\sqrt{2} - 1) L = 0{,}41 L.$$

Под влиянием длины l максимальная деформация кручения каната в верхнем сечении возрастает примерно на 17%. Поскольку же это редкий случай, то при больших глубинах подъема влиянием этого участка можно пренебречь.

На рис. 89 показаны эпюры установившихся углов поворота на спрямленном канате для двух крайних положений системы подъема, показывающие асимметрию деформаций под влиянием участка *I*.

§ 14

ВЛИЯНИЕ КРУЧЕНИЯ КАНАТОВ НА ИЗНОС ФУТЕРОВКИ ШКИВОВ КЕПЕ

Предположение о том, что кручения каната на шкиве не происходит, является, конечно, условным и может быть отнесено к шкиву в целом, но ни ко всем участкам дуги обхвата каната.

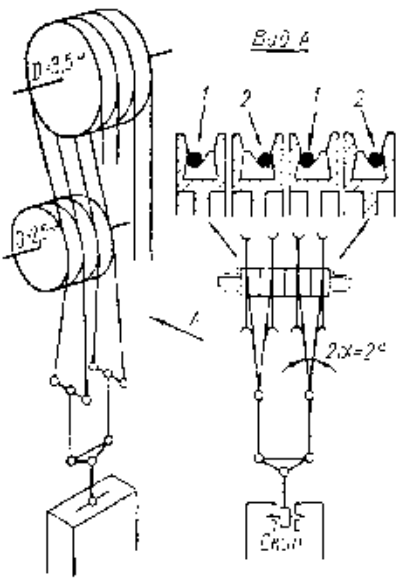


Рис. 90. Схема бокового износа футеровки шкивов на многоканатном подъеме.

Кручение опускающейся ветви каната частично распространяется на некоторый участок каната на шкиве, т. е. возникает некоторая дуга прокручивания каната на шкиве. Это прокручивание вызывает боковой износ футеровки шкива в направлении возможного качения каната.

На рис. 90 показан характер износа футеровки на четырехканатном подъеме с отклоняющим шкивом шахты «Ново-Центральная» в Донецке. Подъем оснащен трехграннопрядными канатами односторонней свивки, из которых два шведских левой свивки *1* и два отечественного производства правой свивки *2*. В верхнем положении скипа канаты имеют небольшой угол девиации $\alpha = 1°$.

Как видно из рисунка, канаты левой свивки, несмотря на девиацию вправо от плоскости шкивов, дают боковой износ футеровки влево, а канаты правой свивки при левой

девиации дают боковой износ футеровки вправо. В то же время на шахте «Ясиновская-Глубокая» работают многоканатные подъемные машины МК2, 1 × 4 без отклоняющих шкивов, оснащенные круглопрядными канатами крестовой свивки, и одностороннего бокового износа футеровки не наблюдается. Причина одностороннего износа футеровки в первом случае кроется в наличии отклоняющего шкива по следующим соображениям.

Опускающаяся ветвь каната вращается в сторону раскручивания верхнего его конца. Исходя из этого, по направлению свивки каната можно установить направле-

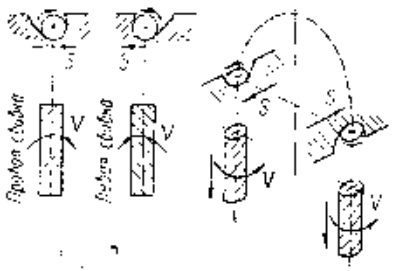


Рис. 91. Направление крутения канатов в точке соприкосновения со шкивом.

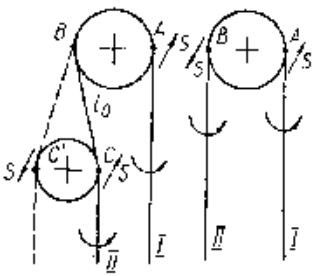


Рис. 92. К расчету влияния отклоняющего шкива на износ футеровки.

ние его прокручивания V на шкиве и направление бокового износа S футеровки со стороны опускающейся ветви (рис. 91). Из рисунка видно, что канат правой свивки вращается и изнашивает футеровку вправо, левой свивки — влево, что точно соответствует фактическим данным (см. рис. 90).

Противоположные ветви каната в период опускания вращаются в разные стороны по отношению к его оси, хотя на рисунке мы видим их вращающимися в одну сторону, что объясняется перегибом каната на шкиве на 180°. Следовательно, боковой износ футеровки под действием противоположных ветвей направлен в разные стороны. Поэтому в подъемных машинах без отклоняющего шкива футеровка изнашивается в обе стороны равномерно, что мы имеем на шахте «Ясиновская-Глубокая».

Действие отклоняющего шкива (рис. 92) сводится к тому, что он первый воспринимает на себя кручение при

опускании ветви *II* каната. Кручение на ветвь каната l_0, а следовательно, и на шкив трения передается значительно расслабленным. Поэтому боковой износ футеровки шкива трения в точке *B* не компенсирует противоположного бокового износа в точке *A*.

Из сравнения рис. 91 и 92 легко понять, что при переброске ветви *II* каната на отклоняющем шкиве через точку *C'* шкивы получают боковой износ футеровки в разные стороны; при переброске ветви каната через точку *C* (в сторону сближения ветвей каната) футеровка на обоих шкивах изнашивается в одну и ту же сторону в зависимости от направления свивки каната. Последний случай наблюдается на шахте «Ново-Центральная».

Мерой борьбы с этим неблагоприятным явлением, если нельзя избежать отклоняющего шкива, является применение канатов в достаточной степени уравновешенных от кручения.

Интенсивный износ канавок шкивов Кепе был также зафиксирован на одной из шахт в ФРГ в Руре [110, 111], особенно на отклоняющем шкиве. Причину вначале искали в неправильной расточке шкивов. Однако неоднократная их переточка нисколько не изменила положения. Только с применением двухслойных некрутящихся канатов явление интенсивного износа шкивов прекратилось.

Все эти явления подчеркивают переменный, кинематический характер кручения канатов в подъеме системы Кепе.

§ 45

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И НАБЛЮДЕНИЙ

Описанное выше явление износа футеровки шкивов Кепе можно отнести уже к результатам промышленных наблюдений, косвенным образом вскрывающих явление кручения канатов в шахтном подъеме. Кроме того, можно привести ряд других, более убедительных подтверждений полученных нами закономерностей.

Признаком кручения канатов в шахтном подъеме является изменение шага свивки по длине каната. Если верхняя часть каната раскручивается (рис. 93), а нижняя закручивается, то, очевидно, шаг свивки каната при переходе от его верхнего конца к нижнему должен постоянно умень-

шаться. Наибольшее различие в шаге свивки должно быть в крайних сечениях каната.

На рис. 94 представлены результаты периодических измерений шага свивки в крайних сечениях вертикального отвеса для четырех одинаковых канатов одной из глубо-

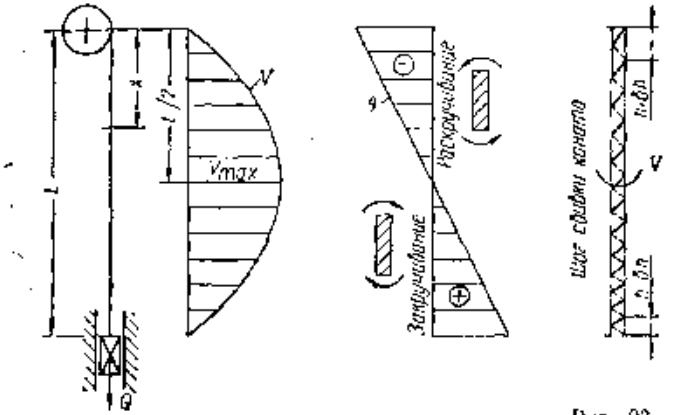


Рис. 93.
Изменение шага свивки каната по его длине.

ких шахт в Южной Африке [104]. Шаг свивки измерялся примерно через месяц в течение одного года одновременно на всех четырех канатах. Наблюдается большая законо-

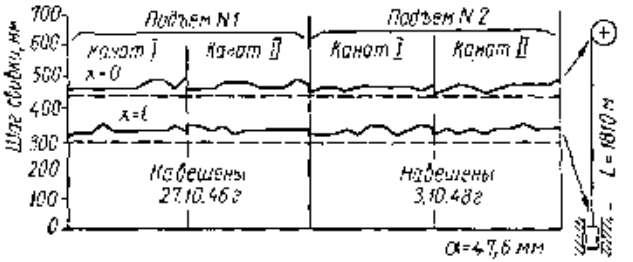


Рис. 94. Результаты измерения шага свивки по концам каната диаметром 46,7 *мм* и длиной 1810 *м*.

мерная разница в шаге свивки для обоих концов каната. Для верхнего конца каната шаг свивки оказался в среднем равным 475 *мм*, для нижнего — 318 *мм*. Полное увеличение шага свивки составляет в среднем 145 *мм*, или примерно 45% длины шага свивки на нижнем конце каната.

Для оценки этих измерений шагов свивки на рис. 94 штриховой линией показаны расчетные данные, найденные по формулам (1.89) и (VII.11) для каната (6 × 37) К + о. с. без учета действия концевого груза. Параметры каната взяты из графиков рис. 30 и с помощью формул (II.48) пересчитаны на диаметр 47,6 *мм*. Погонный вес каната в соответствии с ГОСТ 3071—55 принят равным 8,2 *кг*. В соответствии с расчетом крайние значения шага свивки получаются 434 и 280 *мм*, что находится в области, весьма близкой к их фактическим значениям. Среднюю величину шага свивки 390 *мм* можно считать равной его начальному значению. Тогда уменьшение его до 318 *мм* на нижнем конце каната означает прямое его укорочение, что вполне сообразуется с расчетами, приведенными в § 41.

Конечно, увеличение шага свивки в верхнем конце каната получается и без влияния кручения вследствие разности натяжения. Если же считать, что кручения нет, и отнести эту разницу в шаге свивки только за счет различного относительного удлинения каната, то такое относительное удлинение в верхнем его конце, как 45%, выходит далеко за пределы разрушающего. Следовательно, причина кроется здесь в кручении каната.

К числу непосредственных измерений углов поворота каната по его длине относится исследование голландских инженеров [107], проведенное на подъемной установке системы Кепе с расположением подъемной установки на башенном копре.

На опускающуюся ветвь каната в точке его схода со шкива наносилась белая полоса до полного опускания каната в ствол. При этом сразу же было заметно вращение белой полосы. При подъеме опущенной ветви канат накладывался на шкив без изменения кручения. Наблюдая поведение белой полосы вблизи шкива при подъеме опущенной ветви, можно было измерить число ее оборотов вокруг каната на различных его участках. При этом белая полоса превратилась в винтовую линию переменного шага. В верхней половине каната это была левая винтовая линия, в нижней — правая.

Следовательно, деформация кручения имеет различные знаки в верхней и нижней половинах каната. Шаг винтовой линии белой полосы равен одному обороту каната. На рис. 95 показан график изменения числа оборотов белой полосы по длине каната по данным этих измерений. Пунктиром

показана расчетная кривая угла поворота (VII.10) по экспериментальному значению v_{max} (VII.14):

$$v(x) = 4v_{max}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}.$$

Расчетные и экспериментальные кривые почти во всех точках совпадают, за исключением небольших отклонений у нижнего конца каната, вызванных влиянием участка l, не переходящего через шкив (см. рис. 89).

Белая полоса, нанесенная на опускающийся канат, показывает его поворот не относительно естественного ненапряженного состояния, а поворот левой ветви относительно правой, или наоборот. Поэтому поворот белой полосы равен разности углов поворота в данной точке в левой и правой ветвях каната. Как видно из эпюр углов поворота на рис. 89, эта разность на нижнем конце опущенной ветви каната на длине участка l, не переходящего через шкив, равна нулю, что полностью объясняет поведение кривой вращения на рис. 95. Выше этой точки углы поворота ветвей, направленные в разные стороны, во вращении белой полосы складываются. И поэтому, если не учитывать влияние участка l, то белая полоса дает в точности удвоенное вращение каната.

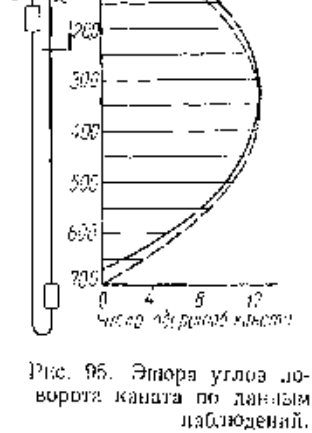


Рис. 95. Эпюра углов поворота каната по данным наблюдений.

Точно таким же методом измерено кручение канатов на ряде шахт с подъемными установками системы Кепе в ФРГ в Рурском угольном бассейне [110, 111]. Эти опыты были вызваны следующими обстоятельствами. В ФРГ в шахтном подъеме широкое распространение получили канаты типа закрытый «Варрингтон» (см. § 1) односторонней свивки. Эти канаты оправдали себя на подъемах системы Кепе глубиной до 650 м. Начиная примерно с 1950—1953 гг., в Руре начали входить в строй шахты глубиной 860—1200 м. На этих глубинах подъема при той же системе Кепе указанные канаты резко понизили свою стойкость примерно

от 2 лет до 6 мес., хотя известно, что с увеличением глубины подъема, если не принимать во внимание кручение, условия работы каната, особенно его динамический режим, улучшаются [82].

Данные подъемных установок и результаты испытаний различных конструкций канатов представлены в табл. 43, 44.

Таблица 43

Характеристика подъемных установок системы Кепе

Параметры подъемных установок	Единица измерения	Подъемные установки			
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4,5
Глубина подъема	*м*	1040	800	930	625
Длина вертикального отвеса	»	1100	—	—	—
Диаметр каната	*мм*	63	62	67	59
Тип подъемного сосуда	—	Скип		Клеть	
Максимальная концевая нагрузка	*кг*	22 400	—	—	—
Число подъемов в сутки	—	450—500	—	—	—

Кручение канатов измерялось только на подъеме № 1. При этом установлено следующее.

Белая полоса, нанесенная на опускающуюся ветвь каната, в верхней части каната превращалась в винтовую линию одного, а в нижней — другого направления вращения. Число оборотов белой полосы в верхней половине каната было в точности равно ее числу оборотов в нижней половине. Знаки $\pm$ означают число оборотов белой полосы влево и вправо. Это указывает на то, что эпюра углов поворота каната есть симметричная относительно его середины кривая (см. рис. 84). В средней части каната белая полоса идет точно вдоль вертикальной оси каната без вращения. Следовательно, в средней части каната при $x = \frac{L}{2}$ деформация кручения равна нулю.

Таким образом, все эти опыты вместе взятые показывают, что наши уравнения достаточно отражают качест-

Таблица 44

Результаты сравнительных испытаний различных типов канатов на подъемах системы Кепе в Руре

№ по пор.	Тип каната	Кручение каната, оборотов	Срок службы, мес.	Характер разрушения, причина снятия
	Подъем № 1, глубина 1040 м			
1	(7 × 45) 0 + (5 × 7) К + + о. с.	± 58	2	Порыв стального сердечника
2	(7 × 45) 0 — (5 × 7) К + + о. с.	± 30	7,5	То же
3	(8 × 26) 0 — (6 × 24) 0 — — (5 × 8) 0 + о. с. овальнопрядный	± 2	15	Для обследования
4	То же	—	23	В момент наблюдений (в работе)
	Подъем № 2, глубина 860 м			
5	Семипрядный закрытый «Варрингтон» односторонней свивки	± 42	6	Порыв проволок
6	То же	± 32	7,5	То же
7	Шестипрядный крестовой свивки с удлиненным шагом	± 14	23	Порывы проволок, коррозия
	Подъем № 3, глубина 930 м			
8—10	Семипрядный закрытый «Варрингтон» односторонней свивки	—	6; 10, 12	Порывы проволок
11	Трехслойный овальнопрядный типа № 3	—	15	В момент наблюдений (в работе)
	Подъем № 4—5, глубина 625 м			
12	Семипрядный закрытый «Варрингтон» односторонней свивки (средние данные по 19 канатам)	—	24	Порывы проволок

венную картину кручения канатов в шахтном подъеме под действием собственного веса. Конечно, кроме собственного веса, на кручение каната оказывают влияние некоторые другие факторы, такие как изгиб на шкиве, углы девиации и пр. Однако эти факторы второстепенные, так как если бы они оказывали серьезное влияние, то они изменили бы эпюры углов поворота в ту или другую сторону от расчетной, например, могли бы сделать эпюру углов поворота несимметричной относительно середины каната или вообще изменить ее характер.

Из анализа работы канатов на этих подъемах (табл. 44) видна явная зависимость их сроков службы от глубины подъема или, точнее, от величины кручения. Так, на одном и том же подъеме № 1 канаты № 3—4, имеющие ничтожное кручение, работали во много раз дольше, чем канаты № 1—2, максимальный угол поворота которых достигал 30—60 оборотов. Однослойный канат односторонней свивки на подъемах № 2 глубиной 860 *м* и № 3 глубиной 930 *м* имел в два — четыре раза меньший срок службы, чем на подъемах № 4—5 глубиной 625 *м*. В то же время обычный канат крестовой свивки № 7 с удлиненным шагом, обладающий значительно меньшим кручением, на том же подъеме № 2 с глубиной 860 *м* успешно работал два года.

К сожалению, во всех этих источниках подробная характеристика канатов не приводится, кроме первых трех канатов из табл. 44, для которых лишь указаны диаметры проволок. По этим данным для первых двух канатов нами восстановлены примерные их углы свивки сообразно с возможностью их геометрического построения и технологией свивки. В соответствии с этими данными в табл. 45 и 46 приведены геометрические и упругие параметры прядей закрытый «Варрингтон» и канатов.

Для сопоставления расчетных и опытных углов поворота каната следует учесть, что белая полоса дает удвоенное значение вращения ветви каната. Тогда максимальный угол поворота белой полосы в оборотах запишется так:

$$\varphi_{бел} = \frac{2\varphi_{max}}{2\pi} = \frac{C}{\Delta} \cdot \frac{pL^2}{8\pi} \text{ оборотов.}$$

Как видно из табл. 47, расчетный угол поворота полосы получается примерно на 17% меньше опытных данных.

Таблица 46

Конструкция и расчетные данные пряди типа закрытый «Варрингтон» ($d = 18{,}85$ *мм*; $E = 2 \cdot 10^{-6}$ *кГ/см²*)*

№ слоя и проволок	Число проволок	b, *мм*	r, *мм*	α	a, *кГ*	b, *кГ·см²*	c, *кГ·см*	Примечание
0	1	1,25	—	—	24 544	19	—	Сердечник
1	6	1,25	1,25	−13° 30′	135 301	245	−4070	
2	7	2,75	3,25	13° 30′	764 504	8 011	59 634	Слои линейного касания свивки «Варрингтон»
3	7	2,75	5,30	21° 30′	669 765	32 579	139 313	
3а	7	2,05	5,65	22° 30′	364 366	20 901	85 187	
4	17	2,75	8,05	10° 30′	691 507	140 301	483 275	Покрытие точечного контакта
Для пряди в целом:					3 650 107	208 196	763 340	

* Углы свивки проволок 1 и 2 определены из условий плотного контакта; углы свивки слоев проволок 3 и 3а — из условий линейного контакта; угол свивки слоя 4 есть среднее углов свивки слоев 2, 3 и 3а.

Таблица 46

К расчету двухслойных канатов $7 \times 45 + 5 \times 7 +$ о. с. ($d = 63$ *мм*)*

№ по пор	Тип пряди или каната	β	r, *мм*	$A \cdot 10^{-3}$, *кГ*	$B \cdot 10^{-3}$, *кГ·см²*	$C \cdot 10^{-3}$, *кГ·см*	$\Delta \cdot 10^{-3}$, *кГ²см²*	$\frac{C}{A} \cdot 10^{3}$, *кГ⁻¹см⁻¹*
—	Основной слой прядей (7×45) 0	16°	22,06	22 789	15 783	18 787	—	—
—	Сердечник (5×7) 0 + о. с.	16°	5,4	1917	77,4	365	—	—
—	Сердечник (5×7) К + о. с.	16°	5,4	1904	31,8	227	—	—
1	(7×45) 0 + (5×7) К + о. с.	—	—	24 693	15 815	19 014	29	65,6
2	(7×45) 0 — (5×7) 0 + о. с.	—	—	24 706	15 861	18 422	52,5	35,1

* Данные пряди сердечника: (1 + 6); $\delta = 2{,}05$; $\alpha = 13° 30'$; коэффициенты жесткости получены по формулам пересчета слоя 1 + 6 на табл. 45.

Таблица 47

Оценка кручения двухслойных канатов $(7 \times 45) + (5 \times 7) +$ $+$ о. с. ($p = 15.1$ *кГ/м*; $L = 1100$ *м*)

№ по пор.	Тип свивки каната	$\frac{C}{\Delta} \cdot 10^6$, $кГ^2 \cdot см^2$	Удвоенный угол поворота, оборотов		Расхождение $\frac{\vartheta_p - \vartheta_э}{\vartheta_э} \cdot 100\%$
			на опыта	по расчету	
1	(7×45) Ф + + (5×7) К + о. с.	65,6	58	48	—17,3%
2	(7×45) О — — (5×7) О + о. с.	35,1	30	25	—16,5%

§ 46

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И АНАЛИЗ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ НА ГЛУБОКИХ ШАХТАХ МНОГОСЛОЙНЫХ КАНАТОВ

Одним из наиболее эффективных примеров применения данной теории является расчет многослойных канатов при работе на глубоком шахтном подъеме системы Кепе.

Применение таких канатов в шахтном подъеме вызвано тем, что многослойный канат имеет большое заполнение поперечного сечения металлом, а следовательно, при одном и том же диаметре — большую разрывную прочность. Последнее имеет особенно большое значение для глубоких шахт, когда с увеличением собственного веса возрастает необходимость в увеличении разрывной прочности каната, желательно при малом диаметре.

В многослойном канате вопрос распределения нагрузки между слоями прядей имеет особое значение, ибо при неблагоприятном распределении нагрузки между слоями прядей преимущество многослойной конструкции каната может обернуться в ее недостаток.

Формулами (VII. 16) и (VII. 17) показано, что деформации любого элемента вертикально подвешенного каната с грузом на конце, подвешенном в направляющих, получаются наложением двух нагрузок: чистого растяжения усилием

$$T_0 = Q + \frac{pL}{2}$$

и растяжение свободно подвешенным грузом

$$T_c = p\frac{L-2x}{2}.$$

Это положение существенно упрощает расчеты двухслойных канатов, для которых для этих случаев нагрузок в главе III на основе безмоментной теории получены упрощенные формулы распределения усилий по слоям прядей.

Зная величины усилий и напряжений отдельно от сил T_0 и T_c и складывая их, получаем результирующие усилия и напряжения по слоям прядей в любом сечении каната.

Усилие T_0 между слоями прядей согласно (III. 25) распределяется следующим образом:

$$T_1 = \frac{S_1}{S}T_0; \quad T_2 = \frac{S_2}{S}T_0;$$

для распределения усилий T_c согласно (III. 26)

$$T_1 = \frac{\mu}{\mu-1}T_c; \quad T_2 = \frac{T_c}{1-\mu},$$

где S_1, S_2, S — площади поперечных сечений соответственно первого, второго слоев прядей и каната в целом.

Величину μ находим из выражения

$$\mu = \frac{r_2}{r_1}\operatorname{tg}\beta_2\operatorname{ctg}\beta_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\frac{h_1}{h_2}.$$

Складывая усилия от нагрузок T_0 и T_c, получим

$$T_1 = \frac{S_1}{S}\left(Q + \frac{pL}{2}\right) + \frac{\mu}{\mu-1}p\frac{L-2x}{2}; \qquad \text{(VII. 35)}$$

$$T_2 = \frac{S_2}{S}\left(Q + \frac{pL}{2}\right) + \frac{p}{1-\mu}\cdot\frac{L-2x}{2}. \qquad \text{(VII. 36)}$$

Этим самым решается задача о распределении усилий по слоям в любом сечении каната.

Для примера рассмотрим наиболее характерную конструкцию двухслойного каната с прядями одинакового диаметра. В таком канате

$$r_2 = 2r_1; \; S_2 = 2S_1; \; S_1 = \frac{1}{3}S.$$

Пользуясь этими формулами, находим следующие значения усилий в верхнем сечении каната.

Случай 1. При свивке прядей в одну сторону с одинаковыми углами свивки ($\mu = +2$):

$$T_1 = \frac{1}{3} Q + \frac{7}{6} pL; \quad T_2 = \frac{2}{3} Q - \frac{1}{6} pL.$$

Случай 2. При свивке прядей в разные стороны с одинаковыми углами свивки ($\mu = -2$):

$$T_1 = \frac{1}{3} Q - \frac{1}{2} pL; \quad T_2 = \frac{2}{3} Q + \frac{1}{2} pL.$$

Случай 3. При свивке слоев прядей в одну сторону с одинаковым шагом ($h_1 = h_2$, $\mu = +4$):

$$T_1 = \frac{1}{3} Q + \frac{5}{6} pL; \quad T_2 = \frac{2}{3} Q + \frac{1}{6} pL.$$

Из этих формул видно, что усилие от концевого груза распределяется между слоями прядей прямо пропорционально площадям их поперечных сечений. Распределение усилий от собственного веса существенно зависит от конструкции каната. В верхнем сечении каната обычно перегруженным оказывается внутренний слой прядей, в нижнем — наружный.

Если не учитывать перераспределения усилий между слоями прядей, то по правилам безопасности усредненные напряжения в верхнем сечении каната определятся как для сплошного стержня:

$$\sigma_0 = \frac{T}{S} = \frac{Q + pL}{S}. \qquad \text{(VII. 37)}$$

Определим разность между этими условными напряжениями и напряжениями, определяемыми по формулам, учитывающим перераспределение нагрузки:

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_0.$$

Здесь σ_1 — напряжения во внутреннем слое прядей в верхнем сечении каната;

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{S_1} = \frac{3T_1}{S}.$$

В результате несложных преобразований находим в случае I ($\beta_1 = \beta_2$)

$$\Delta\sigma = \frac{5}{2} \cdot \frac{pL}{S};$$

в случае 2 ($\beta_1 = -\beta_2$)

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{pL}{S};$$

в случае 3 ($h_1 = h_2$)

$$\Delta\sigma = \frac{3}{2} \cdot \frac{pL}{S}.$$

Таким образом, действительные максимальные напряжения в двухслойном канате получаются бо́льшими, чем по формуле (VII. 37). Это увеличение вызвано собственным весом каната и имеет особое значение при больших глубинах подъема.

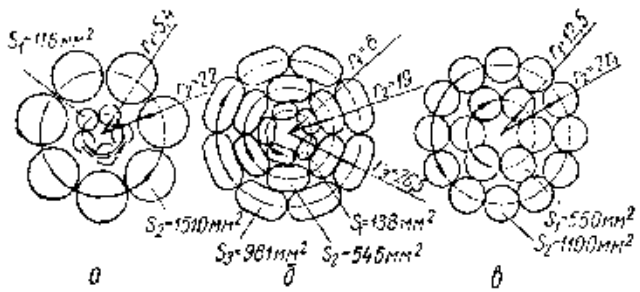


Рис. 96. Поперечные сечения многослойных канатов:
а — (7 × 45) + (6 × 7) + о. с.; б — (8 × 28)0 — (6 × 24)0 — (5 × 8) 0 + о. с.; в — (12 × 19) + (6 × 19) + о. с.

Условие равнопрочности конструкции каната, выраженное в равенстве средних напряжений по слоям прядей как

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{S_1} = \sigma_2 = \frac{T_2}{S_2},$$

приводит к известному условию (см. § 22) уравновешенности

$$\mu = -\frac{S_1}{S_2}.$$

Это значит прежде всего, что углы β_1 и β_2 должны иметь разные знаки, т. е. слои прядей должны быть свиты в разные стороны, а при $\beta_1 \approx \beta_2$ конструкция должна удовлетворять следующему отношению абсолютных величин:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Из рассмотренных вариантов свивки двухслойного каната в предыдущем примере ближе всех приближается

к условию уравновешенности второй вариант ($\beta_1 = -\beta_2$), который имеет наименьшее приращение напряжений $\Delta\sigma$.

Перейдем к анализу промышленных данных о работе многослойных канатов на глубоких подъемах системы Кепе по материалам табл. 44. На рис. 96 показаны основные геометрические очертания поперечных сечений первых трех канатов из этой таблицы, необходимые для расчета по безмоментной теории. Для сравнения приведем также рассмотренный ранее равнощенный двухслойный канат с одинаковыми прядями типа $(12 \times 19) + (6 \times 19) + о. с.$

В табл. 48, 49 представлены расчеты усилий и напряжений по слоям прядей в этих канатах.

В трехслойном канате № 3 внутренние два слоя сведены в один слой с приведенным радиусом

$$r_{пр} = \frac{S_1 r_1 + S_2 r_2}{S_1 + S_2}.$$

Отсюда видно, что в первых двух канатах, вышедших из строя из-за порыва металлических сердечников, последние действительно перегружены и работают при очень низких запасах прочности.

Авторы этих наблюдений [110, 111] констатируют следующее. В июне 1953 г. в Рурском бассейне была сдана в эксплуатацию одноканатная подъемная установка со шкивом трения, расположенным на башенном копре. Грузолюдской подъем, рассчитанный на полезную нагрузку 20 *т*, обслуживал ствол глубиной 1040 *м*. Поскольку к тому времени не было опыта эксплуатации канатов на таком подъеме, решили испытать канаты различных типов с целью выяснения наиболее работоспособной конструкции. Для этого различным фирмам ФРГ были заказаны многослойные канаты трех типов: № 1, 2, 3 из табл. 44. Более подробная характеристика канатов № 1 и 2 приведена в табл. 45 и 46.

Канат № 1 был навешен 8 июня 1953 г., а 3 июля, т. е. меньше чем через месяц, примерно в 35 *м* от коуша на нем появились повреждения. Две из семи прядей оказались вдавленными внутрь на длине около 1 *м*. Внешний осмотр поврежденного участка дал основание полагать, что порвался стальной сердечник. После расплетения конца каната длиной 40 *м* сердечник действительно оказался разорванным и его концы разошлись на 1,2 *м*. В месте разрыва заложили кусок такого же сердечника, и канат

Таблица 18

Расчет усилий в многослойных канатах при $Q = 22\,400$ *кГ* и $L = 1100$ *м*

№ по пор.	Конструкция каната	p, *кГ/м*	Слои прядей	S, *мм²*	r, *мм*	$n = \frac{r_2}{r_1}$	Усилия в крайних сечениях каната, *кГ*	
							$x = 0$	$x = L$
1	$(7 \times 45)\,0 + (5 \times 7)\,K + o.\,c.$	15,1	1	116	5,4	4,08	13 100	−8900
			2	1510	22		25 900	31 300
2	$(7 \times 45)\,0 - (5 \times 7)\,0 + o.\,c.$	15,1	1	116	5,4	−4,08	8770	−4 570
			2	1510	22		30 230	26 970
3	$(8 \times 28)\,0 + (6 \times 24)\,0 - (5 \times 8)\,0 + o.\,c.$	15,3	1	684	16,5	1,6	17 800	7400
			2	981	26,5		21 400	15 000
4	$(12 \times 19) + (6 \times 19) + o.\,c.$	15,3	1	550	12,5	2,0	27 650	−6550
			2	1100	25		12 150	25 950
5	$(12 \times 19) - (6 \times 19) + o.\,c.$	15,3	1	550	12,5	−2,0	15 850	4650
			2	1100	25		23 350	17 750

Таблица 49

Анализ напряжений в многослойных канатах в верхнем сечении

№ по поф.	Конструкция каната	Свивка слоев каната	Степень неуравновешенности (III,32)	Слои прядей	Средние напряжения, кГ/мм²	Запас прочности при $\sigma_b = 170$ кГ/мм²	Характер разрушения
1	$(7 \times 45)\,0 + (5 \times 7)\,К + о.\,с$	В одну сторону	1,0	1	113	1,5	Порыв сердечника через 1 мес. работы
				2	17	10	
2	$(7 \times 45)\,0 - (5 \times 7)\,0 + о.\,с.$	В разные стороны	0,965	1	75	2,25	Порыв сердечника через 4 мес. работы
				2	20	8,5	
3	$(8 \times 28)\,0 - (6 \times 21)\,0 - (5 \times 8)\,0 + о.\,с.$	В разные стороны	0,394	1	26	6,5	Работает нормальный срок службы
				2	22	7,7	
4	$(12 \times 19) + (6 \times 19) \pm о.\,с.$	В одну сторону	1,0	1	49	3,5	—
				2	11	15,5	
5	$(12 \times 19) - (6 \times 19) \pm о.\,с.$	В разные стороны	0,600	1	29	6,0	—
				2	21	6,0	

проработал еще 11 дней, после чего был снят. Таким образом, продолжительность работы каната составила около 2 мес.

Причину разрыва сердечника выяснить вполне достоверно в то время, как это констатируют авторы, не удалось. Мнения специалистов сошлись на том, что канаты со стальным сердечником нецелесообразно применять для подъемов глубоких шахт.

Канат № 2 такой же конструкции, но с противоположно свитым сердечником, был навешен 2 августа 1953 г., а 15 декабря 1954 г. примерно в 100 *м* от коуша была обнаружена вдавленная наружная прядь. После расплете-

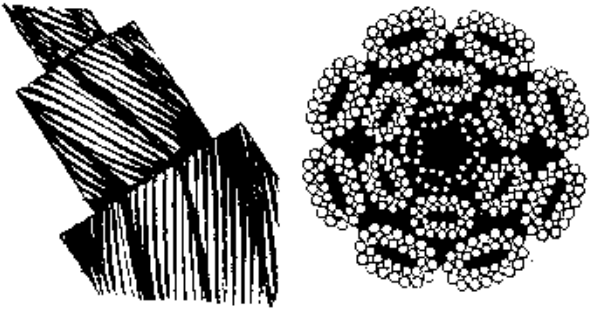


Рис. 97. Трехслойный плоскопрядный канат.

ния этого участка каната оказалось, что снова, как и в первом канате, разорвался стальной сердечник. В поврежденный участок вложили пеньковый сердечник, канат после этого проработал до 12 марта и был снят.

Трехграннопрядный канат односторонней свивки проработал всего 2,5 мес. и был снят вследствие накопления порывов проволок. Все канаты были из оцинкованной проволоки с пределом прочности 170 *кГ/мм*². Статический запас прочности канатов в верхнем сечении составлял 7—7,5.

В связи с тем что предыдущие канаты показали очень короткий срок службы и большое кручение на глубоком подъеме, было решено испытать некрутящийся овально-прядный канат № 3 (табл. 44). Поперечное сечение этого каната показано на рис. 97.

Канат был навешен 29 мая 1954 г. и работал почти без кручения, очень спокойно. Выяснилось также, что он

не чувствителен к экстренным нагрузкам, возникающим в глубоком стволе при загрузке и разгрузке подъемных сосудов большой емкости на весу.

Канат проработал 15 мес. и был снят, поскольку наружный осмотр уже не давал каких-либо сведений о состоянии прядей. Проведенные затем исследования кусков каната показали хорошее состояние его внутренней части: порванных проволок обнаружено не было. Потери агрегатного разрывного сопротивления оказались незначительными. В дальнейшем решено было применять на данном подъеме некрутящиеся канаты этого типа.

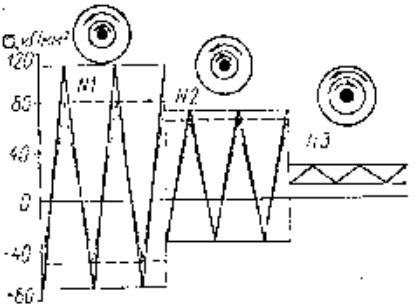


Рис. 98. Графики изменения усредненных напряжений в многослойных канатах.

Наши расчеты полностью раскрывают причины преждевременного разрушения центральной части сначала в канате № 1, а затем в канате № 2. Становится также ясно, почему канат № 3 работает в этих же условиях нормальный срок службы 1,5—2 года (табл. 44). Фактически канат № 1, вместо № 7, по максимальным напряжениям работал при запасе прочности 1,5, канат № 2 — при запасе прочности 2,3, а канат № 3 работал при нормальных для шахтного подъема запасах прочности 6,5. Имея этот расчет, все результаты опытов можно было бы предсказать заранее и сразу выбрать для эксплуатации наиболее подходящую конструкцию каната. В этом и состоит преимущество теории.

Недостаток первых двух канатов усугубляется тем, что в подъеме системы Кепе они испытывают знакопеременный цикл изменения напряжения вследствие периодической перемены концов каната местами. Поэтому, если соединить напряжения в центральной части каната при $x = 0$ и $x = L$ прямыми линиями, то мы получим графики изменения напряжений, показанные на рис. 98. Известно, что при знакопеременном цикле нагружения усталость металла наступает значительно быстрее.

Штриховыми линиями для первых двух канатов показан расчет напряжений, вычисленных по точным формулам (III.1) для распределения усилий. Отсюда видно, что заметную ошибку безмоментная теория дает только для каната № 1, слои прядей в котором свиты в одну сторону. При свивке слоев прядей в разные стороны расчет по безмоментной теории получается достаточно точным.

§ 47

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОСЛОЙНЫХ КАНАТАХ ДВОЙНОЙ СВИВКИ

Для двухслойных канатов нам удалось построить упрощенную безмоментную теорию расчета, которая удовлетворяет основные потребности практики. Остальные канаты рассчитываются по общей методике.

Рассмотрим пример расчета для каната 6×37 — о. с. из § 23. Для этого каната нами уже были вычислены напряжения от чистого растяжения (см. табл. 34 и 37) и от растяжения свободно подвешенным грузом. Если теперь напряжения чистого растяжения пересчитать на нагрузку T_0, а напряжения свободного растяжения — на нагрузку T_c и сложить полученные результаты, то мы получим напряжения в любом сечении каната при его работе в шахтном подъеме. Если это барабанный подъем, то при неизменном грузе Q напряжения останутся постоянными. Для подъема системы Кепе составляющие напряжений свободного растяжения от нагрузки T_c будут переменного знака, что вызовет циклическое изменение напряжений.

В § 23 рассмотрены четыре возможных варианта свивки прядей в этом канате. Целью данного расчета является сравнение этих вариантов по величине максимальных напряжений в проволоках. Это позволит прийти к определенным выводам относительно применения тех или иных вариантов свивки прядей для различных условий работы каната.

Принимаем следующие данные к расчету: $d = 43{,}5$ *мм*; $S = 732$ *мм*²; $p = 6{,}8$ *кГ/м*; $\sigma_в = 170$ *кГ/мм*²; $L = 1000$ *м*; $Q = 12000$ *кГ*.

Определяем составляющие нагрузки T_0 и T_c для крайних сечений каната:

$$T_0 = Q + \frac{pL}{2} = 15\,400 \text{ кГ}; \; T_c = \pm \frac{1}{2} pL = \pm 3400 \text{кГ},$$

где знак плюс будет при $x = 0$ и минус — при $x = L$.

С принципиальной стороны полученные формулы позволяют определить все поле напряжений в сечении каждой отдельной проволоки и каната в целом. Однако это связано с громоздкими вычислениями. Те наиболее важные выводы, которые нам нужно сделать из данного ана-

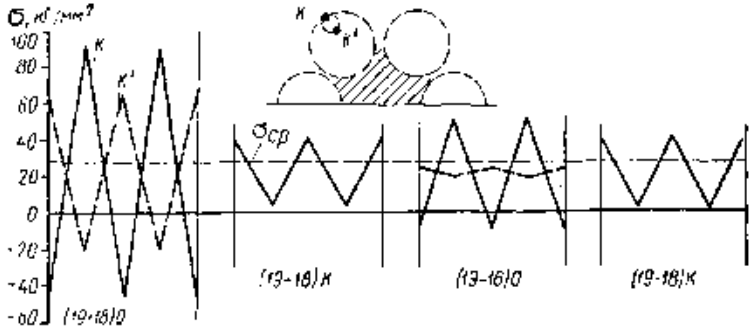


Рис. 99. Графики изменения максимальных напряжений в наружных проволоках каната 6×37 + о. с. диаметром 43,5 мм, длиной 1000 м, при различных вариантах свивки прядей.

лиза, можно получить, рассмотрев лишь наружную проволоку в ее сечении, выступающем на внешний диаметр каната. Наружная проволока выбрана потому, что она подвержена наибольшему износу вследствие контакта со шкивом.

На рис. 99 показаны графики изменения напряжений для наружных проволок в двух диаметрально противоположных точках K и K' при работе канатов на подъеме системы Кепе. Средние напряжения $\sigma_{ср}$ определены по формуле VII.37, как для стержня. Там, где напряжения в точке K мало отличаются от напряжений в точке K', их графики не показаны.

Из графиков видно, что в наихудших условиях находится канат полной односторонней свивки с прядями (19 × 18)0. Остальные канаты находятся примерно в одинаковых условиях, и возникающие в них максимальные

напряжения примерно вдвое меньше, чем в первом канате. Отсюда мы приходим к выводу о нецелесообразности применения для глубоких шахт канатов односторонней свивки.

Данные промышленных испытаний канатов на подъемных установках системы Кепе в Руре (см. табл. 44) полностью согласуются с нашими выводами, а именно, на шахтах глубиной 860—930 *м* канаты крестовой свивки работают в два—четыре раза дольше, чем канаты полной односторонней свивки.

Канаты односторонней свивки при работе на многих других системах подъемных устройств обладают большими преимуществами по сравнению с канатами крестовой свивки благодаря лучшему контакту со шкивом. Однако, как видим, это их преимущество в данном случае оказывается второстепенным фактором по сравнению с напряжением кручения.

В этой связи особо перспективными следует считать канаты с уравновешенными прядями. В таких канатах сохраняются все преимущества односторонней свивки в смысле контакта со шкивом, и одновременно с этим напряжения вследствие кручения не намного отличаются от напряжений в канатах крестовой свивки. Этим самым вопрос канатов для подъема с глубин 1000—1200 *м* может быть решен с помощью однослойных канатов.

§ 48

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ И СООБРАЖЕНИЯ ПО ВЫБОРУ КАНАТОВ ДЛЯ ГЛУБОКИХ ПОДЪЕМОВ СИСТЕМЫ КЕПЕ

Интерес, вызванный к подъему системы Кепе, обусловлен двумя обстоятельствами. С одной стороны, как показывает мировая практика, проблема подъема с больших глубин наиболее эффективно решается посредством многоканатных подъемных установок с движущим шкивом трения. С другой стороны, эта система подъема, в отличие от барабанного, создает неблагоприятные условия работы подъемного каната в связи с появлением циклического скручивания под действием собственного веса, увеличивающегося с глубиной подъема.

Расчеты и данные промышленных испытаний показывают, что в обычных, неуравновешенных от осевого кру-

чения канатах при работе на глубинах свыше 800—900 м знакопеременное скручивание под действием собственного веса выступает как один из главных факторов в его механическом разрушении. Канаты односторонней свивки, в том числе и трехграннопрядные, работающие на глубинах до 700 м нормальный срок службы в среднем 2 года, на этих глубинах подъема снижают свою работоспособность более чем вдвое.

Применение канатов с металлическим сердечником неудачных конструкций, как № 1 и № 2 из табл. 44, приводит к разрушению последнего в первые же месяцы эксплуатации.

По мере применения все более уравновешенных канатов их работоспособность повышается, достигая нормальных значений. Так, канаты крестовой свивки, степень неуравновешенности которых $\psi = 0{,}65$, многослойные канаты типа № 3 ($\psi = 0{,}4$) в условиях глубокого подъема выдерживают нормальный срок службы до двух лет и более. Таким образом, при выборе и расчете канатов для глубоких подъемов системы Кепе следует прежде всего обратить внимание на их степень уравновешенности от кручения.

Конечно, здесь действуют другие факторы, определяющие стойкость каната, такие, как проволока, качество свивки, смазка, антикоррозийные покрытия и т. д. Однако, если разрушение каната происходит из-за механического перенапряжения его элементов, то действие остальных факторов отходит на второй план. Положительное действие всех остальных мероприятий, направленных на увеличение стойкости каната, имеет значение только после того, как обеспечена механическая прочность каната, определяющаяся надлежащим его расчетом и конструктивным исполнением.

С точки зрения уравновешенности каната в пределах технологичности его конструкции наиболее перспективными являются, конечно, закрытые канаты. Однако достаточно высокую уравновешенность можно получить и в пределах обычных конструкций канатов.

На рис. 100 и 101 показаны графики изменения напряжений в верхнем сечении для многослойных канатов из табл. 49 и для каната $6 \times 37 + о.$ с. из рис. 99 при различных вариантах их свивки в зависимости от глубины подъема. Для многослойных канатов приведены усредненные напряжения в наиболее нагруженном внутреннем слое

прядей, для каната 6 × 37 + о. с. — максимальные напряжения в крайних волокнах наружных проволок с учетом их растяжения, изгиба и скручивания. Штриховыми линиями показано изменение запаса прочности во внутреннем слое.

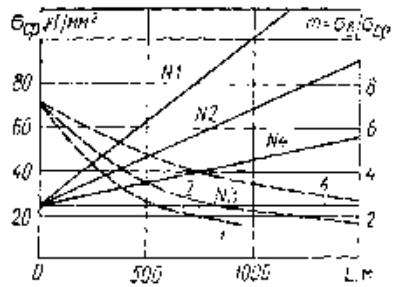


Рис. 100. Графики изменения напряжений в многослойных канатах в зависимости от глубин подъема.

Расчеты выполнены при изменении концевого груза, обеспечивающем постоянный статический запас прочности каната в верхнем сечении, т. е.

$$Q + pL = \frac{P_c}{m} = \text{const}.$$

Эти графики показывают перспективы применения той или иной конструкции каната с увеличением глубин подъема. Так, в канатах односторонней свивки 6 × (19 ÷ 18) 0 + о. с., а также в канатах с металлическим сердечником № 1 и № 2, 7 × 45 + 5 × 7 + о. с. при переходе с глубин порядка 500 до 1000 ÷ 1200 м максимальные напряжения, связанные с кручением, увеличиваются примерно вдвое. В остальных конструкциях канатов напряжения растут более медленно. Горизонтальная прямая $\sigma_{ср}$ соответствует полностью уравновешенному канату ($\psi = 0$). Трехслойный овально-прядный канат № 3, имеющий степень неуравновешенности порядка $\psi = 0{,}4$, очень медленно отклоняется от $\sigma_{ср}$. Величина $\psi = 0{,}4$ находится в пределах допускаемой неуравновешенности, рекомендованной в § 22 с точки зрения максимальных напряжений и агрегатных потерь прочности при свободном растяжении. Следова-

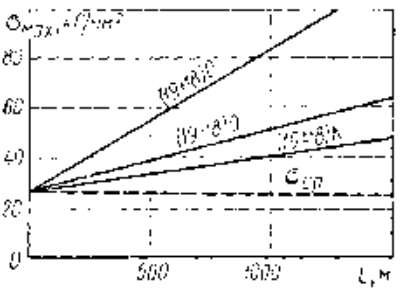


Рис. 101. График изменения максимальных напряжений в канатах 6 × × 37 + о. с. ТЛК в зависимости от варианта свивки прядей и глубины подъема.

тельно, эти рекомендации сохраняются в силе и про выборе канатов для глубоких шахт.

Подводя итог вышеизложенному, можно предложить следующие рекомендуемые типы канатов для глубокого подъема системы Кеше в порядке убывания степени их сопротивляемости кручению: 1) уравновешенные некрутящиеся канаты закрытой конструкции; 2) частично уравновешенные до $\psi = 0{,}4 \div 0{,}6$ многослойные кругло- и фасонопрядные канаты; 3) канаты с уравновешенными прядями крестовой или односторонней свивки по наружным проволокам, а также канаты обычной крестовой свивки.

Конечно, эти рекомендации носят обобщенный характер. Для каждого типа каната в зависимости от степени его уравновешенности существует определенная рациональная глубина его применения. Изучение этих рациональных глубин представляет весьма сложную проблему, для решения которой потребуется накопление большого количества экспериментальных и теоретических данных.

Представляет интерес изучение этой проблемы с точки зрения динамических напряжений в канатах, связанных с крутильными колебаниями.

ГЛАВА 8

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ

§ 49

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНО УПРУГОГО КАНАТА

Интерпретация каната в виде эквивалентного на продольной жесткости сплошного изотропного упругого стержня в классической постановке динамической задачи шахтного подъемного каната приводит к известному волновому уравнению продольных колебаний:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \text{(VIII.1)}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{A}{\rho}}$$

есть скорость распространения упругой волны;

$\rho = \frac{p}{g}$ — линейная плотность;

A — продольная жесткость каната;

t — время.

Динамическое усилие в канате

$$T_x = A \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \text{(VIII.2)}$$

Приращение динамического усилия на длине элемента каната dx равно продольной силе инерции, действующей на этот элемент:

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx,$$

что и приводит к волновому уравнению (VIII.1).

Напряжения при этом предполагаются равномерно распределенными по поперечному сечению каната.

Таким образом, эти уравнения так же, как и в статике, отражают механические свойства сплошного стержня, наделенного продольной жесткостью каната. Введение в статику более общих уравнений упругости каната в виде системы (II.36), связывающей осевые усилия и крутящие моменты в канате, продольные и угловые его деформации, выдвигает новую постановку задачи динамики каната в виде процесса совместных продольно-крутильных колебаний.

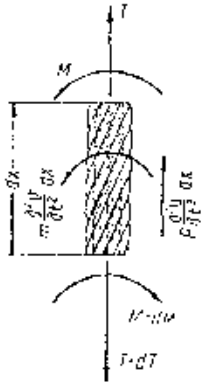


Рис. 102. К выводу уравнений динамики каната.

Вывод новых динамических уравнений строится следующим образом. При совместных продольно-крутильных колебаниях на элемент длины каната (рис. 102) действуют продольная сила инерции

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx$$

и кинетический крутящий момент

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\, dx = \rho \mu^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\, dx,$$

где $m = \rho\mu^2$ — линейный кинетический момент инерции каната;

μ — приведенный радиус инерции площади поперечного сечения каната.

Тогда уравнения равновесия элемента каната запишутся так:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.3)}$$

Выражая осевое усилие T и момент M через уравнения упругости (II.36) и переходя к частным производным, получим динамические уравнения каната в следующей форме:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \qquad \text{(VIII.4)}$$

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \qquad \text{(VIII.5)}$$

Эти уравнения посредством перехода к так называемым главным координатам, или главным колебаниям, разделяются на два независимых уравнения волнового типа следующим образом. Введем новую переменную

$$W = u + \lambda v, \qquad \text{(VIII.6)}$$

где λ — неизвестная пока постоянная величина.

Умножим второе уравнение (VIII.5) на некоторую постоянную α и, сложив уравнения (VIII.4) и (VIII.5), получим

$$(A - \alpha C)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u + \frac{C + \alpha B}{A + \alpha C}v\right] = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u + \alpha\frac{m}{\rho}v\right). \qquad \text{(VIII.7)}$$

Потребуем теперь от α такого значения, чтобы слева и справа под знаками вторых производных была бы одна и та же функция. Это приводит к такому выражению:

$$\frac{C + \alpha B}{A + \alpha C} = \alpha\frac{m}{\rho} = \alpha\mu^2 = \lambda. \qquad \text{(VIII.8)}$$

Отсюда следует квадратное уравнение относительно λ:

$$C\lambda^2 - (B - A\mu^2)\lambda - C\mu^2 = 0. \qquad \text{(VIII.9)}$$

Это уравнение имеет два действительных и различных по знаку корня:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2C}\left[B - A\mu^2 + \sqrt{(B - \mu^2 A)^2 + 4\mu^2 C^2}\right]; \qquad \text{(VIII.10)}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2C}\left[A\mu^2 - B + \sqrt{(B - \mu^2 A)^2 + 4\mu^2 C^2}\right], \qquad \text{(VIII.11)}$$

где следует брать только положительные значения радикалов.

Каждому значению корня соответствует своя функция:

$$W_1 = u + \lambda_1 v; \quad W_2 = u - \lambda_2 v. \qquad \text{(VIII.12)}$$

Таким образом, можно записать следующие два независимых волновых уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}; \\ a_2^2\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial W_2}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.13)}$$

где

$$a_1^2 = \frac{A}{\rho} + \lambda_1\frac{C}{m}; \qquad \text{(VIII.14)}$$

$$a_2^2 = \frac{A}{\rho} - \lambda_2\frac{C}{m}. \qquad \text{(VIII.15)}$$

В соответствии с выражениями (VIII.12) можно перейти к прежним переменным:

$$u = \frac{\lambda_1 W_2 + \lambda_2 W_1}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad v = \frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad \text{(VIII.16)}$$

Динамические усилия и крутящий момент в новых переменных запишутся так:

$$T = \frac{q}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a_2^2 \lambda_1 \frac{\partial W_2}{\partial x} + a_1^2 \lambda_2 \frac{\partial W_1}{\partial x}\right); \qquad \text{(VIII.17)}$$

$$M = \frac{m}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(a_1^2 \frac{\partial W_1}{\partial x} - a_2^2 \frac{\partial W_2}{\partial x}\right). \qquad \text{(VIII.18)}$$

Возможность разделения системы (VIII.5) на два независимых волновых уравнения означает, что при динамических возмущениях в канате возникают две независимых упругих волны W_1 и W_2, имеющих различные скорости распространения a_1 и a_2.

§ 50

ФОРМА ГЛАВНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАНАТА

Колебания каната, определяемые только одной из нормальных координат (VIII.12), называются главными. Так как каждая из этих функций представляет собой линейную комбинацию продольных и угловых смещений каната, то колебания представляют собой винтовые движения каната. Найдем параметры этих винтовых движений.

Следует иметь в виду, что обычно для каната имеют место такие соотношения:

$$A \gg B; \quad A > C > 0.$$

Поэтому согласно (VIII.10), (VIII.11), (VIII.14) и (VIII.15)

$$\lambda_2 \gg \lambda_1; \quad a_1 > a_2. \qquad \text{(VIII.19)}$$

Далее в силу независимости волновых уравнений (VIII.13) процесс колебаний каната можно рассматривать как наложение двух независимых волн W_1 и W_2. При этом всегда можно указать такие искусственные начальные условия, когда одна из волн W_1 или W_2 равна нулю.

Представим вначале такой случай, когда

$$W_1 \neq 0; \quad W_2 = 0.$$

Тогда в соответствии с (VIII.12) для волны W_1 получим соотношения

$$u - \lambda_2 v = 0; \quad \frac{u}{v} = \lambda_2. \qquad \text{(VIII.20)}$$

Следовательно, волна W_1 представляет собой винтовое движение с постоянным шагом винта. Чтобы найти шаг такого винтового движения, необходимо приравнять $u = h_1$, а $v = 2\pi$; в результате получим

$$h_1 = 2\pi\lambda_2. \qquad \text{(VIII.21)}$$

Совершенно аналогично, подобрав соответствующим образом начальные условия так, что

$$W_2 \neq 0, \text{ а } W_1 = 0,$$

для волны W_2 найдем:

$$\frac{u}{v} = -\lambda_1; \quad h_2 = -2\pi\lambda_1. \qquad \text{(VIII.22)}$$

Эти же соотношения можно получить и для деформаций (VIII.4), ибо вместо смещений W_1 и W_2 можно было бы рассматривать их производные по x, причем, как и в статике, положительная деформация кручения dv/dx направлена в сторону закручивания каната, а du/dx — в сторону его растяжения.

В связи с этим замечаем, что в волне W_1 оба смещения u, v и соответствующие им деформации имеют одинаковый знак, а в волне W_2 — разный. Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) волна W_1, распространяющаяся с большой скоростью a_1, представляет собой волну растяжения с закручиванием или, наоборот, волну сжатия с раскручиванием каната;

2) волна W_2, распространяющаяся с меньшей скоростью a_2, представляет собой волну растяжения с раскручиванием или, наоборот, волну сжатия с закручиванием каната.

Рассмотрим далее соотношения между продольными и угловыми смещениями в каждой волне. Для сравнения вместо углового смещения введем соответствующее ему линейное окружное смещение

$$\eta = rv,$$

где r — какой-либо радиус в поперечном сечении каната, проведенный с центра его поперечного сечения.

Полные результирующие смещения точек каната в волнах W_1 и W_2 обозначим соответственно через S_1 и S_2 (рис. 103).

Угол наклона к оси каната винтового движения S_1 выражается через шаг винтовой линии h_1 следующим образом:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{2\pi r}{h_1} = \frac{r}{\lambda_2} = \frac{\eta_1}{u_1}. \qquad \text{(VIII.23)}$$

Соответственно для полного смещения S_2 в волне W_2 получим

$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{2\pi r}{h_2} = -\frac{r}{\lambda_1} = \frac{\eta_2}{u_2}. \qquad \text{(VIII.24)}$$

Найдем радиус r_0, на котором положительные результирующие смещения главных колебаний пересекаются под прямым углом. Условием для этого, очевидно, является равенство

$$\operatorname{tg}\gamma_1 \operatorname{tg}\gamma_2 = -1$$
$$(\gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ).$$

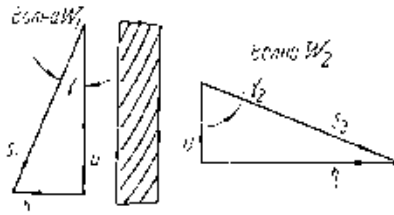


Рис. 103. Форма главных колебаний каната.

Знак минус здесь берем потому, что в силу высказанных выше положений при положительном u углы γ_1 и γ_2 отсчитываются в разные стороны от оси каната.

Отсюда находим

$$r_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\frac{m}{\rho}} = \mu.$$

Таким образом, на радиусе инерции каната смещения его точек в волнах W_1 и W_2 пересекаются под прямым углом. В этом и есть кинематический смысл нормальных координат.

В обычном однослойном канате с органическим сердечником радиус инерции практически совпадает со средним радиусом слоя прядей. Для спирального каната его можно вычислить с достаточной точностью как для сплошного стержня:

$$\mu = \frac{a}{2\sqrt{r}}.$$

Полные смещения точек каната S_1 и S_2 в волнах W_1 и W_2 на уровне главного радиуса будем называть главными смещениями.

Так как $\lambda_2 > \lambda_1$, то

$$\gamma_1 < 45^\circ; \quad \gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1 > 45^\circ$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\eta_1}{u_1} < 1; \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\eta_2}{u_2} > 1.$$

Отсюда можно сделать выводы:

1) в волне W_1 на приведенном радиусе инерции по линейным главным смещениям преобладает продольная волна и поэтому она несет основную продольную волну в канате;

2) в волне W_2 на приведенном радиусе инерции по линейным главным смещениям преобладает крутильная волна и поэтому она несет основную крутильную волну в канате.

В связи с этим волну W_1 будем условно называть главной продольной волной, а W_2 — главной крутильной волной.

С целью дальнейшего уяснения характера главных колебаний воспользуемся формулами (II.60), (II.61) и (II.62) для коэффициентов жесткости каната A, B и C. Будем считать, что канат однослойный с пеньковым сердечником и уравновешенными прядями, когда для прядей $c_0 = 0$ (см. § 23). Радиус инерции каната можно считать равным радиусу свивки прядей r_0. Тогда, подставив значения коэффициентов жесткости каната в формулы (VIII.10) и (VIII.11), после преобразований получим:

$$\lambda_1 = r_0 \operatorname{tg}\beta; \quad \lambda_2 = r_0 \operatorname{ctg}\beta,$$

где β — угол свивки прядей в канате.

Согласно формулам (VIII.23) и (VIII.24)

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\beta; \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = -\operatorname{ctg}\beta$$

и соответственно

$$\gamma_1 = \beta; \quad \gamma_2 = \beta - 90^\circ.$$

Отсюда можно сделать важное заключение: в однослойном канате с уравновешенными прядями ($c_0 = 0$) угол наклона главного смещения S_1 к оси каната в главной продольной волне W_1 равен углу свивки каната; угол

наклона к оси каната главного смещения S_2 в главной крутильной волне W_2 является дополнительным к углу свивки каната. Иными словами, в канате с уравновешенными прядями главная продольная волна W_1 представляет собой винтовые продольные колебания вдоль оси пряди, а главная крутильная волна W_2 — поперечные винтовые колебания пряди (рис. 104).

В канате с обычными прядями, когда $C_\theta \neq 0$, крутящий момент, возникающий в пряди при растяжении, несколько поворачивает систему главных смещений так, что $\gamma_1 \neq \beta$. Однако этот поворот остается незначительным.

В этом состоят особенности форм главных колебаний каната.

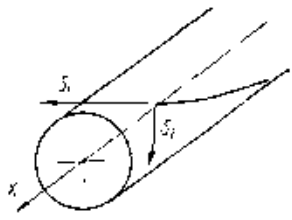


Рис. 104. Направления главных колебаний каната.

В табл. 50 приведен расчет динамических параметров для спирального каната 1 × 61 диаметром 27,45 мм со средним углом свивки проволок $\alpha = 16°$. Этот канат может служить моделью закрытого шахтного подъемного каната.

Из расчета видно, что на главном радиусе каната главная продольная волна W_1 также направлена практически вдоль осей проволок с углом наклона к оси каната $\gamma_1 = 15°$ (при угле свивки 16°). Волна W_2 направлена при этом нормально к оси проволоки.

§ 51

СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГЛАВНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КАНАТЕ

Скорости распространения колебаний в канате согласно уравнениям (VIII.14) и (VIII.15) в развернутом виде получают следующие выражения:

для главной продольной волны W_1

$$a_1^2 = \frac{A}{2\rho} + \frac{B}{2m} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A}{\rho} - \frac{B}{m}\right)^2 + 4\frac{C^2}{m\rho}}; \quad \text{(VIII.25)}$$

для главной крутильной волны W_2

$$a_2^2 = \frac{A}{2\rho} + \frac{B}{2m} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A}{\rho} - \frac{B}{m}\right)^2 + 4\frac{C^2}{m\rho}}. \quad \text{(VIII.26)}$$

Таблица 50

Расчетные динамические параметры спирального каната 1 × 61

Конструктивные данные каната	Динамические параметры каната	Главная продольная волна W_1	Главная крутильная волна W_2
$1 + 6 + 12 + 12 \div 18$ $\delta_0 = 3{,}5$ *мм*; $\delta = 3{,}0$ *мм*; $\alpha = 16°$ $A = 86{,}81 \cdot 10^5$ *кГ*; $B = 6{,}49 \cdot 10^5$ *кГ · см²*; $C = 20{,}63 \cdot 10^5$ *кГ · см*; $\Delta = 98{,}4 \cdot 10^{10}$ *(кГ · см)²*	Линейный вес $p = 4$ *кг/м*; линейная плотность * $\rho = 0{,}41 \frac{кГ \cdot сек^2}{м^2}$; главный радиус $r = 0{,}97$ *см*; линейный кинетический момент инерции * $m = 38{,}5 \cdot 10^{-6}$ *кГ · сек²*; $\varkappa = \frac{a_1}{a_2} = 7{,}5$	$a = 4440$ *м/сек*; $a_1 = 4470$ *м/сек*; $l_{\varkappa} = 3{,}62$ *см*; $\gamma_1 = 15°$; $h_1 = 22{,}8$ *см*	$a_2 = 600$ *м/сек*; $l_1 = 0{,}26$ *см*; $\gamma_2 = -75°$; $h_2 = 1{,}53$ *см*

* Согласно ГОСТ 9867

$$\rho\left(\frac{кГ}{м}\right) = 0{,}8\,\rho\left(\frac{кГ \cdot сек}{м^2}\right)^2; \quad m\,(кгм) = 0{,}81\,m\,(кГ \cdot сек^2).$$

Из первого выражения легко обнаружить, что величина a_1 будет большей, чем величина a из (VIII.1), т. е.

$$a_1 > a = \sqrt{\frac{A}{\rho}}. \qquad \text{(VIII.27)}$$

Следовательно, скорость распространения a_1 главной продольной волны W_1 в реальном канате будет больше скорости a распространения чистых продольных колебаний в канате-стержне.

Превышение a_1 над a можно представить как превышение динамического модуля упругости $E_д$ над статическим $E_{ст}$, если по-прежнему рассматривать канат как изотропное тело с позиций уравнения (VIII.1). Модуль упругости каната (стержня) можно найти известным образом из статических испытаний, а также из динамических испытаний путем измерения скорости распространения упругой волны. Если скорость распространения упругой волны в канате найдена из опыта в виде $a_{эксп}$, а его плотность ρ определена путем простого взвешивания, то по этим данным можно найти модуль упругости каната из динамических испытаний:

$$E_д = \frac{\rho}{g} a^2_{эксп}.$$

На основании таких опытов А. М. Пеньковым и М. С. Кролевцом [60, 77] было обнаружено, что модуль упругости каната, найденный из динамических испытаний, $E_д$ превышает часто намного модуль упругости каната из статических испытаний. Это превышение обнаружено также в ряде опытов Г. Н. Савина [83, 84], но уже в более узких пределах — не более 5%.

Для теоретической оценки этого явления упростим формулу (VIII.25). Подкоренные выражения в обеих формулах могут быть представлены так:

$$\left(\frac{A}{\rho} - \frac{B}{m}\right)^2 + 4\frac{C^2}{\rho m} = \left(\frac{A}{\rho} + \frac{B}{m}\right)^2 - 4\frac{AB - C^2}{\rho m}.$$

Второй член в правой части для обычных канатов получается как минимум на порядок ниже первого. Поэтому при вычислении радикалов можно воспользоваться их разложением в ряд с сохранением первых двух членов

разложения:

$$\sqrt{\left(\frac{A}{\rho}-\frac{B}{m}\right)^2+4\frac{C^2}{m\rho}}=\sqrt{\left(\frac{A}{\rho}+\frac{B}{m}\right)^2-4\frac{AB-C^2}{m\rho}}=$$
$$=\frac{A}{\rho}+\frac{B}{m}-2\frac{AB-C^2}{Am+B\rho}+\ldots$$

Тогда формула (VIII.25) может быть записана так:

$$a_1=a\xi, \qquad \text{(VIII.28)}$$

где

$$\xi^2=1+\frac{B^2\frac{\rho}{m}+C^2}{A^2\frac{m}{\rho}+AB}=1+\frac{B^2+C^2\mu^2}{\mu^2(A^2\mu^2+AB)}. \qquad \text{(VIII.29)}$$

Динамический модуль упругости есть условная величина, поскольку из опытов, как видим, мы получаем не величину a из (VIII.1), а более сложную комбинацию коэффициентов жесткости каната, объясняемую выражением (VIII.28). Если считать, что из опыта мы получаем фактическую величину a_1, то ожидаемое превышение условного динамического модуля упругости каната над статическим

$$E_д/E_{ст}=\xi^2. \qquad \text{(VIII.30)}$$

В табл. 51 дана расчетная оценка этого отношения для каната 6 × 37 + о. с. на основании данных, приведенных для него на рис. 29 и 30.

Таблица 51

Оценка условного динамического модуля упругости для каната 6 × 37 + о. с.

Динамический модуль упругости и его превышение над статическим	Угол β			
	11° 30'	17°	20°	25°
	Односторонняя свивка			
ξ_1^2	1,104	1,134	1,178	1,27°
$\frac{E_д-E_{ст}}{E_{ст}}100\%$	10,4	13,4	17,8	27,0
	Крестовая свивка			
ξ_1^2	1,05	1,06	1,09	1,169
$\frac{E_д-E_{ст}}{E_{ст}}100\%$	5	6	9	16,9

Из таблицы видно, что порядок расчетного превышения $E_д$ над $E_{ст}$ в общем соответствует экспериментальным данным. При этом для канатов односторонней свивки это превышение получается примерно в два раза больше, чем для крестовой, и значительно возрастает по мере увеличения углов свивки каната. Расчеты показывают, что величина ξ практически не зависит от коэффициента поперечного сужения каната, т. е. от степени его обтяжки.

Для каната крестовой свивки при обычных углах свивки, принятых на практике в пределах 15—17°, разница между $E_д$ и $E_{ст}$ получается пренебрежимо малой, что вполне сообразуется с опытами и выводами Г. Н. Савина.

Физически увеличение $E_д$ над $E_{ст}$ в волне W_1 можно объяснить следующим образом. Волна W_1 есть волна растяжения с закручиванием. При закручивании канат укорачивается, что уменьшает его общее удлинение от осевой динамической нагрузки и внешне выражается в увеличении его продольной жесткости.

Существование крутильных колебаний в канате при действии продольных возмущений впервые обнаружено в опытах Г. Н. Савина и В. Г. Бессонова [84], которые отметили, что возникающая крутильная волна имеет значительно меньшую скорость распространения, чем продольная. Подсчеты показывают, что скорость a_1 распространения продольной волны W_1 находится в пределах 4000—4700 *м/сек*, в то время как скорость a_2 распространения крутильной волны W_2, как правило, не превышает 1000 *м/сек*.

Специальные опыты по изучению крутильных колебаний канатов в лабораторных условиях были поставлены В. В. Морозовым [66]. Ему удалось подтвердить то, что волна W_1, распространяющаяся с большей скоростью, представляет собой волну одновременного растяжения и закручивания каната, а волна W_2 — растяжения с раскручиванием.

В. В. Морозовым были определены из опыта обе скорости распространения колебаний a_1 и a_2. Основные данные этих опытов и их сравнения с нашими расчетами даны в табл. 52. Для скорости a_1 совпадение с опытами получается всегда удовлетворительным. По скорости распространения крутильных колебаний a_2 хорошее совпадение расчетов с опытами обнаруживается только для канатов спиральных и с металлическим сердечником. Для канатов с органическим сердечником расчетная величина a_2 полу-

Таблица 52

К опытам В. В. Морозова

№ по пор.	Тип каната	Скорость волны W_1, м/сек		Расхождение $\Delta_{\%}$	Скорость волны W_2, м/сек		Расхождение $\Delta_{\%}$
		из опыта	по расчету		из опыта	по расчету	
1	Спиральный 1 + 6 + 12	4918	4870	—1,58	768	756	—1,8
2	(6 × 19) К + (1 × 19)	—	4510	—	642	705	+9,8
3	(6 × 37) К + о. с.	4346	4414	+1,57	463	227	—
4	(6 × 37) О + о. с.	4216	4420	+4,85	541	227	—

чается значительно заниженной, в связи с чем потребуются еще некоторые уточнения как теоретической, так и экспериментальной части. Однако уже одно то, что цельнометаллические канаты хорошо следуют расчетной схеме, достаточно свидетельствуют в пользу данной теории.

Согласование расчетов с опытами в канатах с пеньковым сердечником для волны W_2 можно существенно улучшить, если принять в расчет коэффициент C для каната с коррективом (II.85), предложенным в § 18.

§ 52

УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГОГО КАНАТА

Упругий динамический расчет каната получается несколько условным в вследствие больших затуханий колебаний пригоден только для оценки первого максимума напряжений. Рассеивание энергии в канате на внутреннее трение благодаря его сложной структуре получается значительно большим, чем в сплошных стержнях.

Наиболее удобной математической формой для описания упругих несовершенств каната-нити является гипотеза Фойгта [83, 95]. В соответствии с этой гипотезой напряжения линейно зависят от скорости деформации:

$$\sigma = E\left(\varepsilon + \alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right), \qquad \text{(VIII.31)}$$

где ε — относительное удлинение материала;

α — коэффициент вязкости;

E — модуль упругости.

Конечно, такая гипотеза для каната несколько условна, но ввиду ее простоты она обладает определенными преимуществами. В пользу ее приемлемости можно представить следующие соображения. Относительное удлинение винтового элемента в канате

$$\varepsilon = \cos^2\beta\frac{\partial u}{\partial x} + r\sin\beta\cos\beta\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Относя радиус слоя r к углу поворота v, оба смещения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial(rv)}{\partial x}$ можно рассматривать как равноценные линейные смещения элемента каната. Этим смещениям препятствуют вязкие внутренние силы трения между элементами в смазанном канате. Поэтому напряжение вязкости учитывается единым коэффициентом α перед ε, общим как для смещения u, так и для rv, а это приводит к формуле вида (VIII.31). Если же принять во внимание внутреннее вязкое трение внутри материала проволок, то это также в определенной степени точности может быть отражено формулой (VIII.31), относя ее к модулю упругости материала проволок. Таким образом, относя эту формулу к элементу каната в коэффициенте вязкости α, будем учитывать вязкое трение как в материале проволок, так и внутри каната.

При выводе дифференциальных уравнений динамики каната

$$T = A\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$M = C\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial x}$$

их левая часть не дифференцируется по t нигде. Поэтому оператор

$$E' = E\left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

можно рассматривать как некоторый модуль вязкой упругости элементов каната, являющийся общим множителем перед коэффициентами жесткости каната A, B и C. Следовательно, вместо модуля нормальной упругости E общим множителем можно вынести оператор $\left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

В результате получим

$$T' = \left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)T;\ M' = \left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)M, \quad \text{(VIII.32)}$$

где T и M имеют выражения для упругого каната.

Тогда волновые уравнения каната (VIII.13) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2\left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}; \\ a_2^2\left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.33)}$$

Преимущество такой схемы расчета, как видим, заключается в том, что в систему динамических уравнений входит только один параметр вязкости, подлежащий определению на опыте.

§ 53

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ И НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КАНАТА ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ

Многие переходные режимы работы подъема — загрузка подъемного сосуда на весу, трогание с места, внезапное торможение и т. п. — происходят за короткие промежутки времени, при котором длина каната вообще постоянна (загрузка сосуда на весу) или изменяется настолько незначительно, что ее свободно можно считать постоянной. Поэтому динамика каната в своем развитии начинается из рассмотрения канатов постоянной длины. Однако, ограничиваясь постоянной длиной каната, мы не можем выйти за пределы отдельных частных задач, описывающих переходные режимы в отдельные оторванные друг от друга короткие промежутки времени, и не получаем, таким образом, представления о динамических процессах в канате вообще за весь период подъема. Потребность в этом побудила создание динамики каната (нити) переменной длины как специальной ветви математической физики [83].

Динамика каната с учетом крутильных колебаний получила свое развитие только в последние годы в связи с формулировкой системы динамических уравнений (VIII.4) и (VIII.5). Первые решения этой системы были получены автором [12, 13] для каната постоянной длины операционным методом в виде бесконечных рядов. Решения были получены для случая внезапного приложения груза к канату и для случая движения верхнего его конца с произвольным ускорением. Одновременно в работах В. В. Морозова [65,

66, 67, 68) были рассмотрены решения в замкнутой форме по Даламберу. Несколько позже в работах А. А. Чижа [97, 98, 99] были получены интегро-дифференциальные уравнения продольно-крутильных колебаний для каната переменной длины и их решения асимптотическими методами.

Обычно принимаемая расчетная схема для каната постоянной длины показана на рис. 105. Закрепление верхнего конца каната выражается в форме

$$u(0, t) = v(0, t) = 0. \qquad \text{(VIII.34)}$$

Граничным условием на нижнем конце каната является уравнение равновесия груза

$$T_x(L, t) = Q - \mathfrak{M}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=L}, \qquad \text{(VIII.35)}$$

где $\mathfrak{M}$ — масса груза. Выражение для динамического усилия здесь следует брать в форме (VIII.17).

Условия закрепления груза относительно угловых перемещений запишутся следующим образом. В случае свободной подвески груза

$$M_x(L, t) = -I\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_{x=L}, \qquad \text{(VIII.36)}$$

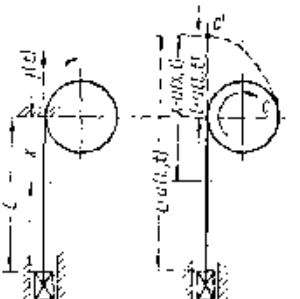


Рис. 105. К определению граничных условий.

где I — момент инерции груза относительно оси каната.

При подвеске груза в продольных направляющих

$$v(L, t) = 0, \qquad \text{(VIII.37)}$$

или согласно (VIII.16) в нормальных координатах

$$W_1(L, t) = W_2(L, t) = u(L, t). \qquad \text{(VIII.38)}$$

Периоды неравномерного движения подъема интерпретируются как движение верхнего конца каната с ускорением $j(t)$. В абсолютной системе координат это изменяет граничное условие на верхнем конце каната (VIII.34) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} = -j(t); \quad v(0, t) = 0. \qquad \text{(VIII.39)}$$

Эти граничные условия можно снова привести к форме VIII.34), перейдя к подвижной системе координат, движущейся вместе с верхним концом каната. Для этого продольное смещение точек каната необходимо представить в виде сумм двух составляющих:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(t). \qquad \text{(VIII.40)}$$

Тогда, полагая $u_1(0, t) = 0$, получим

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = -j(t). \qquad \text{(VIII.41)}$$

Вводя эти функции в динамические уравнения (VIII.13) в прежних обозначениях, получим:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 W_1'' &= \ddot{W}_1 - j(t); \\ a_2^2 W_2'' &= \ddot{W}_2 - j(t), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.42)}$$

где функции $W_1(x, t)$ и $W_2(x, t)$ удовлетворяют нулевым условиям на верхнем конце каната (VIII.34).

Граничное условие (VIII.35) при этом перепишется так:

$$T_2(L, t) = Q - \mathfrak{M}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=L} - j(t)\right]. \qquad \text{(VIII.43)}$$

Постановка задачи динамики каната переменной длины с учетом крутильных колебаний впервые дана в работе Г. Н. Савина и О. А. Горошко [83]. Начало отсчета координаты x принимается от точки закрепления каната c, ушедшей на барабан, которая в развернутом состоянии принимает положение c' (рис. 105). При этом уравнение (VIII. 42) для динамических составляющих и граничные условия на нижнем конце каната (VIII. 37) и (VIII. 43) остаются прежними, как и для каната постоянной длины. Изменению подлежат граничные условия на верхнем конце вертикального отвеса каната в точке его набегания на барабан.

По Г. Н. Савину и О. А. Горошко эти условия записываются так:

$$\left.\begin{aligned} u(s, t) &= \int_0^t \frac{\partial u(s, t)}{\partial x} \dot{l}(t)\, dt; \\ v(s, t) &= \int_0^t \frac{\partial v(s, t)}{\partial x} \dot{l}(t)\, dt, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.44)}$$

где

$$\dot{l}(t) = \frac{dl(t)}{dt} \approx V_0 = \int_0^t j(t)\,dt \qquad \text{(VIII.45)}$$

есть окружная скорость барабана.

Эти уравнения отражают закон накопления деформаций в набежавшей на барабан ветви каната при условии отсутствия их относительного проскальзывания.

В упомянутых выше работах нами были получены следующие решения для каната постоянной длины:

1. Внезапное приложение к нижнему концу каната груза без начальной скорости:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial x} &= C_1 - C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_i \xi}{s_i} \cos \mu_i \tau; \\ \frac{\partial W_2}{\partial x} &= C_1 - \nu C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \nu \mu_i \xi}{s_i'} \cos \mu_i \tau, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.46)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\nu = \frac{a_1}{a_2}; \quad C_1 = \frac{Q}{\rho a_2^2} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \nu^2 \lambda_2}; \\ &C_2 = \frac{2Q}{\rho} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{a_2^2}; \quad \tau = \frac{a_1 t}{L}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.47)}$$

$$s_i = \left(\frac{\lambda_1}{\sin^2 \nu \mu_i} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\gamma} + \frac{\lambda_2}{\sin^2 \mu_i}\right) \mu_i \sin \mu_i; \qquad \text{(VIII.48)}$$

$$s_i' = s_i \frac{\sin \nu \mu_i}{\sin \mu_i}; \quad \gamma = \frac{\rho L}{\mathfrak{M}}. \qquad \text{(VIII.49)}$$

Числа μ_i есть собственные частоты, определяемые характеристическим уравнением

$$\lambda_1 \operatorname{ctg} \nu \mu_i + \nu \lambda_2 \operatorname{ctg} \mu_i = \nu \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\gamma} \mu_i, \qquad \text{(VIII.50)}$$

в котором следует брать только положительные значения корней. Если до этого на канате висел некоторый груз Q_0, то

$$\mathfrak{M} = \frac{Q + Q_0}{g}.$$

2. В случае внезапного приложения груза Q с начальной скоростью V_0 решения получаем на основании (VIII. 46):

$$\frac{\partial W^*_{1,2}}{\partial x} = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial x} + V_0 \frac{\mathfrak{M}}{Q} \cdot \frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial x\, \partial t}. \qquad \text{(VIII.51)}$$

3. При движении верхнего конца каната вверх с постоянным ускорением j имеем следующие решения:

$$\left.\begin{aligned} W_1(x,\ t) &= 2\frac{jL^2}{\nu a_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} R_i \frac{1-\cos\mu_i\tau}{\mu_i^3} \sin\mu_i\xi; \\ W_2(x,\ t) &= 2\frac{jL^2}{\nu a_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} R_i' \frac{1-\cos\mu_i\tau}{\mu_i^3} \sin\nu\mu_i\xi, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.52)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} R_i &= \frac{\mu_i}{s_i}\left(\frac{\nu_1}{\sin\nu\mu_i} + \frac{\nu_2}{\sin\mu_i}\right); \\ R_i' &= R_i \frac{\sin\mu_i}{\sin\nu\mu_i}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.53)}$$

4. Если ускорение j изменяется во времени по произвольному закону, то решения записываются в виде

$$W_{1,2}(x,\ t) = \int_0^t j(\theta) \frac{\partial \varphi_{1,2}(x, t-\theta)\, d\theta}{\partial t}, \qquad \text{(VIII.54)}$$

где функции $\varphi_{1,2}$ равны (VIII. 52) при $j = 1$.

Так, например, если ускорение $j = \text{const}$ действует только в период времени $0 < t < \tau_0$, то при $t < \tau_0$ решение остается в форме (VIII. 52), а при $t > \tau_0$ согласно (VIII. 54)

$$W_{1,2}(x, t) = j\,\varphi_{1,2}(x,\ t) - j\,\varphi_{1,2}(x, t-\tau_0). \quad \text{(VIII.55)}$$

При изменяющемся по линейному закону ускорении

$$j = a + bt \qquad \text{(VIII.56)}$$

получим

$$W_{1,2}(x, t) = a\,\varphi_{1,2}(x, t) + b\int_0^t \varphi_{1,2}(x, t)\, dt. \quad \text{(VIII.57)}$$

§ 54
СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ КАНАТА

Решение в рядах сводится к определению корней характеристического уравнения (VIII. 50). Полученные таким образом числа μ_i представляют собой собственные частоты колебаний каната, а уравнение (VIII. 50) в связи с этим называют также уравнениями частот.

Для уяснения спектра собственных частот колебаний каната решению уравнения частот удобно дать графическое представление. Для этого корни μ_i будем искать как точки пересечения (рис. 106) графиков функций:

$$y_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\operatorname{ctg}\nu\mu;$$

$$y_2 = \alpha\mu - \lambda_2 \operatorname{ctg}\mu, \quad \text{(VIII.58)}$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\nu}.$$

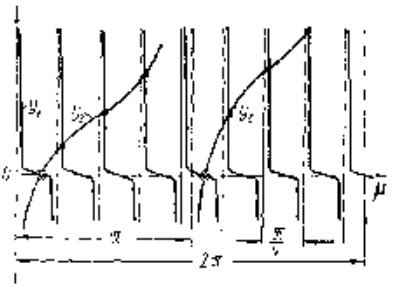


Рис. 106. Графическое решение характеристического уравнения.

Так как

$$\lambda_2 \gg \lambda_1; \quad \nu = \frac{a_1}{a_2} \gg 1,$$

то ординаты графика y_1 получаются очень малыми по сравнению с y_2 везде, кроме точек, близких к

$$\mu_i = \frac{i\pi}{\nu} \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \qquad \text{(VIII.59)}$$

в которых $\operatorname{ctg}\nu\mu_i \to \infty$.

Как видно из рис. 106, график y_1 по сравнению с y_2 приближается к ломаной линии с вертикалями, асимптотически приближающимися к прямым линиям (VIII. 59), а по горизонтали — к оси абсцисс. Такое поведение графиков обусловливает появление двух групп корней. Корни первой группы получаются близкими к точкам $y_2 = 0$, т. е. близкими к корням уравнения

$$\alpha\mu - \lambda_2 \operatorname{ctg}\mu = 0. \qquad \text{(VIII.60)}$$

Для спирального каната, например, из табл. 50 имеем: $\lambda_1 = 0{,}26$, $\lambda_2 = 3{,}62$; $\nu = 7{,}5$. Поэтому не будет большой ошибки, если положить

$$\lambda_1 + \lambda_2 \approx \lambda_2.$$

Тогда это уравнение приобретает вид

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma = \frac{\rho L}{\mathfrak{M}}, \qquad \text{(VIII.61)}$$

а это, как известно, является характеристическим уравнением для продольных колебаний сплошного стержня с грузом на конце [95].

Таким образом, корни, или собственные частоты, первой группы близки к частотам собственных продольных колебаний каната-стержня.

Так как графики y_1 в остальной части приближаются к вертикалям (VIII.59), то корни второй группы будут близки к корням уравнения

$$\sin \nu\mu_r = 0, \qquad \text{(VIII.62)}$$

которые равны (VIII.59).

Нетрудно показать, что уравнение (VIII.62) является уравнением частот собственных крутильных колебаний каната при защемленных от вращения его концах. Каждой частоте соответствует собственная форма колебаний каната. Такое распределение собственных частот позволяет судить об амплитуде собственных форм колебаний каната по волнам W_1 и W_2.

Для этого обратимся к выражениям (VIII.52), из которых легко показать, что в случае корней, близких к (VIII.59), чему соответствует (VIII.62), амплитудные коэффициенты для главной продольной волны W_1 $R_r \to 0$, а для главной крутильной волны W_2 $R_r' \to 1$.

Это значит, что крутильная волна W_2 слабо влияет на амплитуды колебаний в главной продольной волне W_1, и последняя по своим собственным частотам и собственным формам колебаний очень близка к частным продольным колебаниям каната-стержня.

Однако в некоторых случаях влияние крутильных колебаний на продольные будет существенным, что легко обнаружить по первым двум корням. Для каната-стержня в каждом интервале длиной π мы имели бы один график вида y_2 (рис. 106). Поэтому каждому такому интервалу в канате-стержне соответствует только один корень, только одна собственная частота.

Совместность продольно-крутильных колебаний выражается в том, что для каждого из них в каждом интер-

вале длиной π мы имеем $\nu = a_1/a_2$ корней. Корни первой группы, близкие к корням уравнения собственных частот для каната-стержня, располагаются вблизи оси абсцисс. Из общей теории колебаний известно, что наибольшее влияние оказывают первые главные тона колебаний. На рис. 107 показаны возможные варианты расположения первых корней нашего уравнения частот.

Если график функции y_2 пересекает ось абсцисс в первом малом интервале π/ν близко к началу отсчета, то первый корень будет корнем первой группы типа (VIII.61). Второй корень расположится на большом расстоянии от оси абсцисс и будет отнесен к корням второй группы типа (VIII.62), и чем дальше этот корень от оси абсцисс, тем он будет ближе к этому значению. Однако по мере смещения графика y_2 вправо второй корень опускается вдоль кривой y_1 вниз, а первый корень смещается при этом вправо. В результате первые корни сближаются настолько, что оба могут быть отнесены к корням первой группы с равноценным их значением. Таким образом, для главных продольных колебаний каната вместо одной первой главной частоты, что имеет место для каната-стержня всегда, мы получаем две первых главных частоты, а это уже вносит существенные изменения в колебания каната. Такое сближение корней возможно в том случае, когда график y_2 пересекает ось абсцисс в точке, близкой к $k\frac{\pi}{\nu}$, т. е. когда частоты, определяемые уравнениями (VIII.61) и (VIII.62), совпадают. Совпадение частот собственных чисто продольных и чисто крутильных колебаний носит явление внутреннего резонанса в канате.

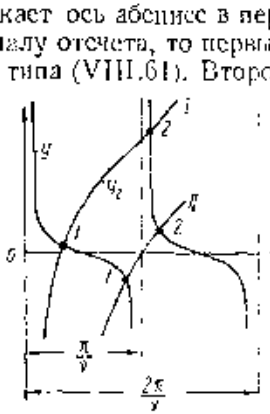


Рис. 107. Положение корней в околорезонансной области

В данном случае, как это следует из рис. 107, первые корни, приближаясь на сколь угодно близко, никогда не совпадают. Следовательно, полного внутреннего резонанса здесь не будет, и это явление можно рассматривать как околорезонансный случай.

Рассмотрим на примере спирального каната из табл. 50 поведение основных тонов колебаний в резонансной области.

Для этого вначале рассмотрим дорезонансную область. Пусть первый главный корень совпадает с точкой

$$y_1 = 0; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\nu},$$

где

$$\cos \nu\varphi_1 = 0; \quad \sin \nu\varphi_1 = 1.$$

Основные данные для расчета из табл. 50: $\nu = 7{,}5$; $\lambda = 0{,}26$; $\lambda_2 = 3{,}62$. Этому значению y_2 соответствует $\gamma = 0{,}05$.

Расчет выполним с точностью до постоянного множителя для случая внезапного приложения груза к нижнему концу каната без начальной скорости.

Пользуясь формулой (VIII.46) для волны W_1, получим решение, соответствующее первому тону колебаний,

$$W_1' = A\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2\nu L}\cos\frac{\pi\tau}{2\nu}\right).$$

При $x = 0$

$$W_1' = A\left(1 - \cos\frac{\pi\tau}{2\nu}\right);$$

при $x = L$

$$W_1' = A\left(1 - 0{,}98\cos\frac{\pi\tau}{2\nu}\right).$$

Так как при $\tau = 0$ решение обращается практически в нуль, что соответствует начальным условиям задачи, то ряд практически сходится по первому тону колебаний.

Для волны W_2 находим

$$W_2' = A\left(1 - 1{,}57\cos\frac{\pi x}{2L}\cos\frac{\pi\tau}{2\nu}\right).$$

Здесь уже первого тона колебаний совершенно недостаточно, ибо при $x = L$ в силу того, что $\cos \nu\varphi_1 = 0$, главная крутильная волна W_2 вообще не имеет этого тона колебаний. На верхнем конце каната получим:

$$(W_2')_{x=0} = A\left(1 - 1{,}57\cos\frac{\pi\tau}{2\nu}\right),$$

чего также недостаточно для сходимости ряда. Следовательно, необходимо брать корни второй группы, соответствующие собственным частотам крутильных колебаний каната.

Величина корня второй группы в функциях $\sin\mu$ и $\cos\mu$ с высокой степенью точности может быть принята равной (VIII.59), но этого недостаточно для $\operatorname{ctg}\nu\mu$, который при этом обращается в бесконечность, ибо для произведения $\nu\mu$ ошибка формулы (VIII.59) увеличивается в ν раз.

Поэтому для вычисления чисел $\nu\mu$ функцию y_2 можно брать при μ из (VIII.59). Тогда из уравнения (VIII.50) получим

$$\operatorname{ctg}\nu\mu_i = \frac{i\pi}{\gamma}\cdot\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1} - \nu\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\operatorname{ctg}\frac{i\pi}{\nu}. \qquad \text{(VIII.63)}$$

Беря таким образом следующие два корня при $i = 1, 2$, получим вторую и третью частоты:

$$\mu_2 = \frac{\pi}{\nu}; \quad \mu_3 = \frac{2\pi}{\nu}.$$

В результате решение для функции W_2' с точностью до третьего тона колебаний запишется так:

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = A\left(1 - 1{,}57\cos\frac{\pi x}{2L}\cos\mu_1\tau + 0{,}42\cos\frac{\pi x}{L}\cos\mu_2\tau + \right.$$
$$\left. + 0{,}13\cos\frac{2\pi x}{L}\cos\mu_3\tau + \ldots\right).$$

При $x = 0$ это дает удовлетворительную сходимость ряда, а при $x = L$ этих членов ряда еще недостаточно.

Таким образом, главная продольная волна W_1, с высокой точностью определяемая только одним первым корнем первой группы, вызывает целую гамму частот крутильных колебаний каната с соизмеримыми амплитудами. Поэтому ряд для функции W_2 сходится очень медленно.

Рассмотрим случай внутреннего резонанса. Для упрощения расчета будем считать, что график y_2 пересекает ось абсцисс точно в точке

$$y_{2i} = \frac{i\pi}{\nu}.$$

Этому значению y_2 соответствует следующее отношение массы каната к массе концевого груза:

$$\gamma_i = \frac{\rho L}{\mathfrak{M}} = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\frac{i\pi}{\nu}\operatorname{tg}\frac{i\pi}{\nu}. \qquad \text{(VIII.64)}$$

Корни μ_1 и μ_2 располагаются примерно симметрично относительно этой точки, поэтому можно положить

$$\mu_{1,2} = \frac{i\pi}{\nu} \pm \Delta, \qquad \text{(VIII.65)}$$

где Δ — малая относительно π/ν величина.

Тогда значения ординат графика y_2 в этих точках можно представить посредством дифференциала:

$$(y_2)_{1,2} = y_2\left(\frac{i\pi}{\nu}\right) \pm \Delta\left(\frac{\partial y_2}{\partial \mu}\right)_{\mu = \frac{i\pi}{\nu}},$$

а так как

$$\operatorname{ctg} \nu\mu = \operatorname{ctg}(i\pi \pm \pi\Delta) = \pm \operatorname{ctg} \nu\Delta,$$

то в соответствии с (VIII.58) получаем

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{2\beta \sin^2 \beta}{2\beta + \sin 2\beta}, \qquad \text{(VIII.66)}$$

где

$$\alpha = \nu\Delta; \quad \beta = \frac{i\pi}{\nu}.$$

Так как величина α мала, то, полагая $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$, эту формулу можно дальше упростить так:

$$\alpha^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{2\beta \sin^2 \beta}{2\beta + \sin 2\beta}. \qquad \text{(VIII.67)}$$

Каждому значению $i = 1, 2, 3$ соответствует своя пара резонансных частот (VIII.65).

В нашем примере при $i = 1$ находим: $\gamma_1 = 0{,}2$; $\Delta = \pm 0{,}0106$; $\mu_1 = 0{,}4083$ *рад* $= 23^\circ\ 24'$; $\mu_2 = 0{,}4295$ *рад* $= 24^\circ\ 36'$.

Этим значениям Δ соответствуют:

$$\sin \nu\mu_1 = \sin(\pi - \nu\Delta) = +0{,}0795; \quad \cos \nu\mu_1 \approx -1;$$

$$\sin \nu\mu_2 = \sin(\pi + \nu\Delta) = -0{,}0795; \quad \cos \nu\mu_2 \approx -1.$$

В соответствии с решениями (VIII.46) и с точностью до этих двух основных резонансных тонов колебаний для нижнего конца каната при $x = L$ находим колебания груза

$$u(t) = AL[1 - 0{,}520 \cos \mu\tau - 0{,}485 \cos(\mu\tau + \varepsilon\tau)];$$

деформации в главных колебаниях

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = A[1 - 0{,}49 \cos \mu\tau - 0{,}455 \cos(\mu\tau + \varepsilon\tau)];$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = A[1 + 19{,}4 \cos \mu\tau - 20 \cos(\mu\tau + \varepsilon\tau)];$$

продольная деформация

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\,[1 + 0{,}84 \cos \mu\tau - 1{,}77 \cos (\mu\tau + \varepsilon\tau)];$$

крутильная деформация

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A[5{,}15 \cos \mu\tau - 5{,}02 \cos (\mu\tau + \varepsilon\tau)],$$

где

$$\mu = \mu_1;\ \varepsilon = \mu_2 - \mu_1 = 2\Delta.$$

Сходимость решений к нулю при $\tau = 0$ получается удовлетворительной. Это значит, что пара двух резонансных частот представляет собой основные тона колебаний каната, что существенно отличается от дорезонансного случая.

Для анализа колебательных процессов отбросим в этих формулах постоянные члены, соответствующие статическим деформациям каната. Тогда оставшиеся переменные члены будут отражать колебания каната относительно положения статического равновесия.

Округляя коэффициенты до полной сходимости решений, получим:

$$u(t) = -\frac{AL}{2}\,[\cos \mu\tau + \cos (\mu\tau + \varepsilon\tau)];$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0{,}8\,A\,[\cos \mu\tau - 2{,}25 \cos (\mu\tau + \varepsilon\tau)];$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -5\,A\,[\cos \mu\tau - \cos (\mu\tau + \varepsilon\tau)].$$

Таким образом, получается наложение двух основных тонов гармонических колебаний, которые можно рассматривать как колебания с одинаковой частотой μ, но с переменным сдвигом по фазе $\varepsilon\tau$.

Так как ε мало по сравнению с μ, то колебания груза вначале при малом τ происходят примерно в одной фазе и амплитуды двух близких гармоник складываются.

$$u(t) = -AL \cos \mu\tau.$$

При этом крутильные колебания в двух основных тонах находятся в противофазе, а так как амплитуды этих основных тонов получаются практически одинаковыми, то

результирующая амплитуда крутильных колебаний равна нулю:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

С ростом времени основные тона колебаний груза сдвигаются по фазе и результирующая амплитуда колебаний груза уменьшается (рис. 108). В момент времени, соответствующий $\varepsilon\tau = \pi$, основные тона колебаний груза находятся в полной противофазе и груз успокаивается. В это время крутильные колебания находятся в полной фазе и их амплитуда удваивается:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -10A \cos \mu\tau.$$

Продольная волна деформации при этом также достигает своего максимума:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2{,}6A \cos \mu\tau.$$

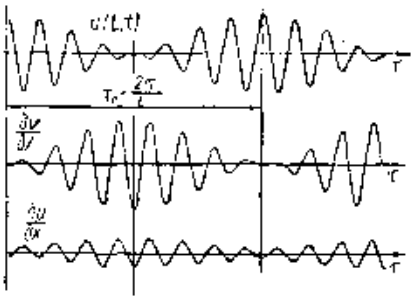


Рис. 108. Графики биения колебаний в околорезонансной области.

Таким образом, успокоение концевого груза является ложным показателем успокоения колебаний самого каната, и наоборот, при этом амплитуда крутильных колебаний и вызванных ими продольных деформаций достигает своего наибольшего значения.

С дальнейшим ростом времени сдвиг по фазе уменьшает крутильные колебания, а концевой груз снова без внешних возмущений начинает раскачиваться. В момент времени, соответствующий $\varepsilon\tau = 2\pi$, крутильные колебания полностью успокаиваются, а колебания груза возрастают до своего максимума, как и в начальный момент времени при τ, близком к нулю.

Такие периодические вспышки или биения то продольных, то крутильных колебаний показывают периодическую перекачку энергии с периодом

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\varepsilon}$$

из продольных колебаний груза в крутильные колебания каната, и наоборот. В этом отношении хорошим аналогом продольно-крутильных колебаний каната являются

колебания двух маятников с близкими периодами собственных колебаний [62].

Описанные биения в амплитуде колебаний концевого груза, приводящие их к периодическим затуханиям и вспышкам, в случае внутреннего резонанса могут дать на опыте ложное представление о величине затухания колебаний в канате.

Наши расчеты, конечно, не учитывают затухания колебаний. В действительности же вследствие рассеивания энергии такие периодические вспышки колебаний происходят все с меньшими амплитудами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ § 55

Заключая этим краткое освещение вопросов динамики шахтных подъемных канатов с учетом крутильных колебаний, следует указать, что эта проблема по своей постановке нова и еще далеко не изучена.

Проводя аналогию со статикой, можно ожидать, что в ряде случаев влияние крутильных колебаний может оказаться существенным. Это покажут дальнейшие исследования. Что же касается агрегатных динамических усилий в канате, то, как показывают расчеты В. В. Морозова [66], они мало отличаются от расчетов каната по схеме упругой нити.

Однако одним этим еще далеко нельзя отрицать влияния крутильных колебаний. В статике осевые усилия во всех сечениях каната также остались неизменными по сравнению с канатом-нитью, а введение в расчет кручения внесло существенную поправку в напряженное состояние каната. То же показывают и расчеты В. В. Морозова.

Необходимо остановиться также на некоторых экспериментальных методах оценки динамических напряжений в канатах. Часто динамическое усилие в канате измеряется по его агрегатному относительному удлинению специальными датчиками. Иногда эти датчики тарируются на разрывных машинах непосредственно на динамическое усилие по эталонному образцу каната [5].

С точки зрения изложенной выше теории этот метод дает ложные результаты, ибо в совместных продольно-крутильных колебаниях одно относительное удлинение далеко не характеризует динамического усилия в канате.

Если крутильные колебания не вносят существенных

поправок в динамическое усилие, то это не значит, что в формуле

$$T_д = A\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial x}$$

можно отбросить второй член. Под влиянием крутильных колебаний сильно изменяется и величина продольных деформаций, и поэтому формула

$$T_д = A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{эксп},$$

в которой правая часть определяется из опыта, приводит к большим ошибкам.

Обратимся снова за аналогией к статике. В предыдущей главе было показано (§ 41), что под действием собственной силы тяжести канат в нижней части закручивается и укорачивается, несмотря на общее большое растягивающее усилие в нем.

В описанных выше опытах, построенных на последней формуле, это приводит к отрицательным усилиям в канате. В случае установившегося движения верхнего конца каната с постоянным ускорением получается в точности такая же картина.

Таким образом, возникает потребность в критической переоценке этих опытов и разработке новых экспериментальных методов.

Метод измерения динамических усилий на нижнем конце каната по ускорениям концевого груза, как это видно из уравнения (VIII.41), здесь не теряет своего значения.

Преимущество рассмотренной динамической расчетной схемы каната, учитывающей его совместные продольно-крутильные колебания, заключается в том, что в ней учитываются почти исчерпывающе все конструктивные параметры каната: упругие константы его элементов, их углы, направления и радиусы свивки и т. д. Следовательно, это позволяет более полно вскрыть конструктивные особенности различных канатов в динамических режимах (даже если это сравнение будет и качественным), может подсказать рациональные области их применения в шахтном подъеме и в конечном итоге даст более точные сведения в оценке их фактических запасов прочности.

Конечно, эта схема оставляет широкое поле деятельности для ее дальнейшего развития в смысле уточнения параметров канатов A, B и C, более точного учета внутренних диссипативных сил и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амитин И. И., Справочник по стальным канатам, ОНТИ, 1936.

2. Бабекко А. Ф., Аквинсон М. Ю., Экспериментальное исследование распределения растягивающего усилия между проволоками спирального каната с учетом сил трения, Научные записки Одесского политехнического института, Расчет машин на прочность, т. XXXVI, изд. ОПИ, 1961.

3. Белый В. Д., Динамические усилия в шахтных подъемных канатах, Труды МакНИИ, «Вопросы горной электромеханики», т. IX, вып. 2, Углетехиздат, 1959.

4. Белый В. Д., Канатные проводники шахтных подъемных установок, Углетехиздат, 1959.

5. Белый В. Д., Лесин К. К., Экспериментальное изучение динамических усилий в подъемных канатах на эксплуатационных подъемных установках, Труды МакНИИ, «Вопросы горной электромеханики», т. IX, вып. 2, Углетехиздат, 1959.

6. Белый В. Д., Самарский А. Ф., Нормы и методы контроля подъемных канатов закрытого типа, Труды МакНИИ, «Вопросы горной электромеханики», т. XIV, вып. V, Госгортехиздат, 1962.

7. Глушко М. Ф., Исследование напряжений в стальных проволочных канатах, Сб. «Расчеты на прочность», № 7, Машгиз, 1961.

8. Глушко М. Ф., Исследование деформаций и напряжений в спиральных канатах с учетом действительных условий контакта проволок, «Известия вузов. Горный журнал», № 11, 1961.

9. Глушко М. Ф., К вопросу о дифференциальных уравнениях статики и динамики подъемных канатов, Научные труды Харьковского горного института, изд. ХГИ, т. V, 1958.

10. Глушко М. Ф., Теория распределения напряжений в двухслойных подъемных канатах, «Известия вузов. Горный журнал», № 5, 1959.

11. Глушко М. Ф., О распространении упругих волн в стальных проволочных канатах, Научные труды Харьковского горного института, т. V, 1958.

12. Глушко М. Ф., Крутильные колебания шахтных подъемных канатов, «Известия вузов. Горный журнал», 1959, № 8.

13. Глушко М. Ф., Крутильные колебания шахтных подъемных канатов, «Известия вузов. Горный журнал», 1960, № 9.

14. Глушко М. Ф., Основные элементы механики плоского изгиба каната, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

15. Глушко М. Ф., Определение напряжений в проволоках спиральных канатов при изгибе, Научные труды Харьковского горного института, т. VI, 1958.

16. Глушко М. Ф., Напряжения в проволочных канатах двойной свивки при изгибе, «Известия вузов. Горный журнал», 1959, № 6.

17. Глушко М. Ф., Уточненная формула расчета изгибных напряжений в круглопрядных стальных подъемных канатах, «Известия вузов. Горный журнал», 1963, № 8.

18. Глушко М. Ф., К теории некрутящихся подъемных канатов, Сб. трудов ДонУГИ (Рудничный транспорт), № 17, Углетехиздат, 1958.

19. Глушко М. Ф., Волоконский В. Ф., Расчет некрутящихся канатов, «Известия вузов. Горный журнал», 1962, № 8.

20. Глушко М. Ф., Волоконский В. Ф., Изгиб проволок каната при контакте его со шкивом, «Известия вузов. Горный журнал», 1962, № 10.

21. Глушко М. Ф., Некоторые вопросы статики, динамики и конструирования подъемных канатов, Сб. трудов конференции молодых ученых Украины, изд. АН УССР, 1959.

22. Глушко М. Ф., О выборе конструкций подъемных канатов для глубоких шахт, Сб. «Многоканатный подъем», Углетехиздат, 1958.

23. Глушко М. Ф., Применение некрутящихся канатов для многоканатных подъемных машин, Сб. «Многоканатный подъем в горной промышленности», Госгортехиздат, 1960.

24. Глушко М. Ф., Перспективы применения некрутящихся канатов в шахтном подъеме, Сб. статей «Прочность и износ шахтного оборудования», Гостехиздат, 1950.

25. Глушко М. Ф., Вопросы прочности шахтных проходческих подъемных канатов, Научные доклады высшей школы, «Горное дело», 1958, № 2.

26. Глушко М. Ф., Малокрутящиеся однослойные канаты смешанной свивки и их применение в шахтном подъеме, «Известия вузов. Горный журнал», 1961, № 5.

27. Глушко М. Ф., Работа канатов на шахтных подъемных установках системы Кепе, Сб. «Стальные канаты», № 1, «Техніка», 1964.

28. Глушко М. Ф., Методика испытаний некрутящихся проволочных подъемных канатов, «Заводская лаборатория», 1955, № 2.

29. Глушко М. Ф., Механические испытания стальных канатов, «Заводская лаборатория», 1962, № 8.

30. Глушко М. Ф., Приближенный метод расчета фасонно-прядных канатов при растяжении и кручении, «Известия вузов. Горный журнал», 1961, № 6.

31. Глушко М. Ф., Несимметричное растяжение и явление штопора в стальных канатах, Прикладная механика, изд. АН УССР, 1965, № 5.

32. Глушко М. Ф., Шахназарян Э. А., Механический расчет каротажных кабелей с учетом поперечной податливости изоляции, Сб. «Прикладная геофизика», вып. 39, «Недра», 1964.

33. Глушко М. Ф., Савин Г. Н., О строительной механике стальных подъемных канатов, Сб. «Стальные канаты», № 1, «Техніка», 1964.

34. Глушко М. Ф., Шилин И. А., Исследование технологии изготовления трехграннопрядных канатов методом проката круглых прядей, Сб. «Стальные канаты», № 1, «Техніка», 1964.

35. Глушко М. Ф., Шилин И. А., Поисковые технологические схемы проката круглых прядей в трехгранник при свивке в канат, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

36. Глушко М. Ф., Чаругин В. Н., Технологические напряжения в стальных проволочных канатах, Научные записки Одесского политехнического института, Расчеты деталей машин на прочность, т. 36, 1961.

37. Глушко М. Ф., Чаругин В. Н., Канаты односторонней свивки, обоснование их преимущества и пути усовершенствования, Научные записки Одесского политехнического института, Расчеты деталей машин на прочность, т. 36, 1961.

38. Глушко М. Ф., К определению напряжений в проволочных канатах, Сб. «Канатные дороги», Госиздат, Тбилиси, 1961.

39. Глушко М. Ф., Номерованный Б. С., Определение усилий в элементах каната при осевом нагружении, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

40. Глушко М. Ф., Скалацкий В. К., Вопросы расчета, механические испытания и сравнительная оценка круглых обжатых прядей, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

41. Гончаренко Н. К., Экспериментальное определение конструктивного коэффициента канатов, Сб. «Многоканатный подъем», Углетехиздат, 1958.

42. Динник А. Н., Статьи по горному делу, Углетехиздат СССР, 1957.

43. Дирацу В. С., Метод магнитной сепарации для экспериментального определения усилий в проволоках стальных канатов,

Научные записки Одесского политехнического института, т. IX, изд. ОПИ, 1956.

44. Жданов Г. П., Изгибные напряжения в стальных проволочных канатах (спиральной и двойной свивки), Научные труды Харьковского горного института, т. II, 1955.

45. Жданов Г. П., Влияние сил трения между проволоками стальных канатов на изгибные напряжения при пробеге канатов на шкиве, Научные труды Харьковского горного института, т. V, 1958.

46. Жданов Г. П., Оптимальные значения отношения диаметра шкива к диаметру каната для шахтных подъемных установок, Научные труды Харьковского горного института, т. V, 1958.

47. Житков Д. Г., Поспехов И. Т., Стальные канаты для подъемно-транспортных машин, Металлургиздат, 1953.

48. Ильичев А. С., Обзор существующих теорий по расчетам рудничных канатов и результатов практических исследований напряжений, Труды совещания по шахтным подъемным канатам, АН СССР, 1944.

49. Иозеф Г. И., К вопросу рационального геометрического построения канатов, «Научные доклады высшей школы. Горное дело», 1958, № 3.

50. Иозеф Г. И., Геометрическое построение канатов закрытой конструкции методом образующих шаров, «Известия вузов. Горный журнал», 1963.

51. Иозеф Г. И., Нестеров П. П., К вопросу теории конструирования прядей канатов обычной свивки, Научные труды Харьковского горного института, т. I, 1952.

52. Иозеф Г. И., Построение профилей фасонных проволок, Центральный институт информации черной металлургии, серия 6, информация 6, М., 1962.

53. Иозеф Г. И., Геометрическое построение трехграннопрядных канатов, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

54. Ковалев К. В., О теории некрутящихся круглопрядных канатов, «Горный журнал», 1955, № 3.

55. Коваленко Н. И., Модуль упругости и факторы стойкости проволочных канатов, Днепропетровский металлургический институт, 1958.

56. Ковальский Б. С., Цыприн А. М., Информационные материалы ВНИИПТМАШ, № 263, 1953.

57. Ковальский Б. С., Грузоподъемные машины, канаты, блоки, барабаны, ХВАИКУ, 1961.

58. Ковальский Б. С., Расчет крановых канатов по сроку службы, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

59. Ковальский Б. С., Расчет крановых подъемных канатов, «Вестник машиностроения», 1950, № 3.

60. Кролевец И. С., К вопросу о модуле упругости стальных канатов, Сб. статей, посвященных А. Н. Динику, «Исследования по вопросу устойчивости и прочности», изд. АН УССР, 1956.

61. Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложение к задаче механики, Гостехиздат СССР, 1950.

62. Мандельштам Л. И., Лекции по колебаниям, изд. АН СССР, 1955.

63. Масленников К. М., Результаты исследований и расчет канатов на прочность и долговечность, Труды ВНИИПТМАШ, вып. 7 (29), М., 1962.

64. Милковский К. Ю., Проволочный канат в теории и горной практике, 1904.

65. Морозов В. В., О динамических усилиях и напряжениях в шахтных подъемных канатах при внезапной остановке опускающейся ветви каната в стационарном подъеме, «Известия вузов. Горный журнал», 1959, № 5.

66. Морозов В. В., Динамические усилия и напряжения в шахтных подъемных канатах с учетом продольно-крутильных колебаний в условиях стационарного шахтного подъема, Автореферат диссертации, Харьков, 1961.

67. Морозов В. В., Динамические усилия и напряжения в шахтных подъемных канатах при внезапном приложении груза к нижнему концу, ПДВШ, «Горное дело», 1958, № 4.

68. Морозов В. В., О динамических усилиях и напряжениях в шахтных подъемных канатах при движении верхнего конца каната с постоянным ускорением вверх для условий стационарного подъема, ПДВШ, «Горное дело», 1959, № 2.

69. Нестеров П. П., Основы конструирования шахтных подъемных канатов, Углетехиздат, 1949.

70. Нестеров П. П., Многослойные канаты с линейным касанием прядей для многоканатного подъема, Сб. статей «Многоканатный подъем в горной промышленности», Госгортехиздат, 1960.

71. Нестеров П. П., Сергеев С. Т., Проходческие канаты, Металлургиздат СССР, 1953.

72. Нестеров П. П., Шабанов-Кушнаренко Ю. П., Козюберда Н. И., Новый метод определения напряжений в проволочных канатах, «Заводская лаборатория», 1961, № 2.

73. Нестеров П. П., К вопросу о модуле упругости проволочных канатов, Сб. «Многоканатный подъем», Углетехиздат СССР, 1958.

74. Нестеров П. П., Ветров А. П., Влияние параметров свивки стальных канатов на их долговечность, «Известия вузов. Горный журнал», 1964, № 7.

75. Номерованный В. С., О результатах исследования

распределения нагрузки в спиральном канате, Сб «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

76. Пеньков А. М., Бондарчук А. С., Экспериментальные исследования изгибных напряжений в стальных канатах, Сб. трудов института горного дела АН УССР, № 2 (II), 1952.

77. Пеньков А. М., Бондарчук А. С., Кролевец М. С., О динамическом модуле упругости стальных канатов, Доклады АН УССР, 1948, № 5.

78. Пономарев С. Д., Жесткость и прочность многожильных пружин сжатия, Сб. статей «Динамика и прочность пружин», АН СССР, 1950.

79. Попов С. Н., Нелинейные задачи статики тонких стержней, Гостехиздат, СССР, 1952.

80. Рабинович И. М., Курс строительной механики стержневых систем, ч. II, Госстройиздат, СССР, 1954.

81. Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат СССР, 1948.

82 Савин Г. Н., Динамическая теория расчета шахтных подъемных канатов, изд. АН УССР, 1949.

83. Савин Г. Н., Горошко О. А., Динамика нити переменной длины, АН УССР, 1962.

84. Савин Г. Н., Бессонов В. Г., Скорость распространения упругих волн в стальных проволочных канатах, Доклады АН УССР, 1951, № 6.

85. Савин Г. Н., Бессонов В. Г., К вопросу о применении канатов закрытых конструкций на шахтных подъемах, Научные записки института машиноведения и автоматики, т. V, Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении, вып. 4, изд. АН УССР, 1956.

86. Сергеев С. Т., Некрутящиеся проходческие канаты, Углетехиздат, 1952.

87. Сергеев С. Т., Теоретическое исследование переходных процессов при набегании каната на блок, Сб. «Стальные канаты», № 1, «Техніка», 1964.

88. Сергеев С. Т., Фактические усилия в элементах, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка,» 1965.

89. Сергеев С. Т., Похольченко А. С., Почтаренко Е. С., Экспериментальные определения смещения проволок при набегании каната на блок, Сб. «Стальные канаты», № 2, «Техніка», 1965.

90. Скуратов Г., Модуль упругости стальных подъемных канатов, «Горный журнал», 1927, № 4.

91. Тиховидов Б. Д., Напряжения свивки в проволоках шахтных подъемных канатов, Научные труды Харьковского горного института, т. 2, 1955.

92. Тиховидов В. Д., Сравнительная оценка основных факторов, определяющих срок службы стальных канатов, Сб. «Канатные дороги», Госиздат, Тбилиси, 1961.

93. Федоров М. М., Записки института горной механики АН УССР, № 1, 1936.

94. Фиников С. П., Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат СССР, 1952.

95. Флоринский Ф. В., Динамика шахтного подъемного каната, Углетехиздат СССР, 1955.

96. Чаругин В. Н., Внутренние технологические силовые факторы и вопросы усовершенствования технологии стальных проволочных канатов односторонней свивки, Научные записки Одесского политехнического института, т. 48, Одесса, 1962.

97. Чиж А. А., Интегро-дифференциальные уравнения колебаний шахтного каната переменной длины, «Известия вузов. Горный журнал», 1963, № 8.

98. Чиж А. А., К вопросу о продольно-крутальных колебаниях не вполне упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины, Сб. «Стальные канаты», «Техніка», т. I, 1964.

99. Чиж А. А., Горошко О. А., К вопросу о продольно-крутильных колебаниях естественно закрученной нити (каната) переменной длины, Сб. «Стальные канаты», «Техніка», т. I, 1964.

100. Чоповский Г. А., Расчет проволочных канатов, «Инженер», № 11—12, 1906; № 1, 1907.

101. Benoit J., Die Drahtseilfrage. Karlsruhe und Leipzig, 1915.

102. Bendorf H., Beitrage zur Theorie der Drahtseile, Z-it des Österreichischen Ingenier-und Architektenvereins, № 30, 1904.

103. Berg F., Der Spannungszustand einfach geschlagener Drahtseile. Dinglers Politechnisches Journal, Heft 19, 1907.

104. Dollan J., Jackson W., Campbell L., Winding rope practice an the Witwatersrand. The Journal of The South African Institution of Engineers. Vol. 49, Nr. 3, Oct., 1950.

105. Dreher Fr., Ein Beitrag zur Theorie der Drehung und Spannungsverteilung bei zugbelasteten Litzen und Seile., Die Wasserwirtschaft. Nr. 7—8, 1934.

106. Herbst H., Stand und Ziele der Drahtseilforschung. Stahl und Eisen, Nr. 39, 1943.

107. Hermes J. en Bruens F., De torsiewisselingen in een niet — draiivrije kabel van een ophaalinstallatie. Geologie en Mijnbouw., Nr., 11, Band 19. November, 1957.

108. Hruska F., Calculation of stresses in Wire Ropes, Wire and Wire Rope Products, sept., 1951.

109. Hrabak, Die Drahtseile. Berlin, 1902.

110. Grosse — Bley J., Erfahrungen mit verschiedenen Förderseilmacharten bei einer Turm — Gefässforder — anlage und grosser Teufe. Glückauf, Nr. 17/18, 1957.

111. Greis Fr., Erkenntnisse über die Lebensdauer von Schachtförderseilen des Ruhrgebietes im Laufe der letzten 25 Jahsen. Bergakademie, Nr. 7, 1958.

112. Stephan P., Das Einfachgeschlagene Seile unter Zug- und Biegungskräften. Fördertechnik und Frachtverkehr, Nr. 9/10, 1935.

113. Williams A., Steel Wire ropes. Iron and Coal Trades Riview, Vol. 164, Nr. 4372, 1952.

114. Woernle R., Drahtseilforschundg, Z-ft VDI. Nr. 29, Band 77, 1933.

115. Wyss T., Die Stahldrahtseile der Transport-und Forderanlage insbesonderer der stand Seile-und Schwebebahnen. Zürich, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	5

Глава 1.

Общие положения

§ 1. Основные конструктивные формы стальных канатов	14
§ 2. Системы координат	18
§ 3. Общие принципы построения линейного контакта проволок	20
§ 4. Геометрическое построение основных конструкций прядей и канатов	25
§ 5. Основные соображения по построению фасонных профилей проволок в закрытых канатах	33
§ 6. Нормальный точечный контакт круглых проволок	37
§ 7. Уравнения статики	40
§ 8. Уравнения кинематической аналогии	46
§ 9. Геометрические уравнения деформаций	51
§ 10. Выражения для напряжений	55

Глава 2.

Растяжение и кручение стальных канатов

§ 11. Решение уравнений Кирхгофа	58
§ 12. Канонические уравнения для отдельной проволоки в спиральном канате	65
§ 13. Обобщенные уравнения статики каната	70
§ 14. Примеры расчета спиральных канатов (прядей)	76
§ 15. Канаты двойной свивки	82

§ 16. Поперечное сужение и коэффициенты жесткости каната 86
§ 17. Расчет винтовых многожильных пружин и явление расслоения канатов 95
§ 18. Методы и результаты экспериментальных исследований 97

Глава 3.

Силовой расчет и вопросы конструирования канатов

§ 19. Общая схема силового расчета прямого каната 121
§ 20. Экспериментальное определение распределения усилий в канате при кручении 125
§ 21. Уравновешенные некрутящиеся канаты 130
§ 22. Безмоментная теория расчета двухслойных канатов 140
§ 23. Однослойные канаты с уравновешенными прядями 149
§ 24. О плотной свивке в многослойных канатах 155

Глава 4.

Кинематическая теория изгиба. Технологические факторы в канатах

§ 25. Плоский изгиб спирального каната 159
§ 26. Плоский изгиб каната двойной свивки 165
§ 27. Экспериментальные исследования 170
§ 28. Изгиб прядей в прямом канате 177
§ 29. Технологические деформации и напряжения в канатах 179
§ 30. Технологический момент упругой отдачи в канате 184

Глава 5.

Статика изогнутого каната

§ 31. Внутренние уравнения статики 189
§ 32. Изгиб несомкнутого каната 194
§ 33. Геометрия тангенциального контакта 197
§ 34. Силовой анализ тангенциального контакта 201
§ 35. Упрощенное решение задачи 209
§ 36. Внутренняя контактная нагрузка и изгибная жесткость каната 211

Глава 6.

Работа канатов на блоках и барабанах

§ 37. Контакт каната с блоком 220
§ 38. Кручение канатов на блоках и барабанах 224
§ 39. Явление штопора при несимметричном растяжении и формирование изогнутого каната и области набегания на блок 230
§ 40. Смещение нейтральной оси при изгибе и характерные структурные дефекты в канатах 241

Глава 7.

Работа канатов в вертикальном шахтном подъеме

§ 41. Статика вертикального отвеса тяжелого каната 249
§ 42. Крутящий момент в канате и его влияние на шахтные проводники 254
§ 43. Особенности работы каната в барабанном подъеме и в подъеме системы Кепе 257
§ 44. Влияние кручения канатов на износ футеровки шкивов Кепе 262
§ 45. Анализ некоторых промышленных экспериментов и наблюдений 264
§ 46. Расчет на прочность и анализ промышленных испытаний на глубоких шахтах многослойных канатов 273
§ 47. Анализ основных напряжений в однослойных канатах двойной свивки 282
§ 48. Общие выводы и соображения по выбору канатов для глубоких подъемов системы Кепе 284

Глава 8.

Динамические процессы в шахтных подъемных канатах

§ 49. Динамические уравнения идеально упругого каната 288
§ 50. Форма главных колебаний каната 291
§ 51. Скорости распространения главных колебаний в канате 295
§ 52. Уравнение динамики не вполне упругого каната 300
§ 53. Постановка задачи динамики и некоторые решения для каната постоянной длины 302
§ 54. Собственные частоты и формы колебаний каната 307
§ 55. Заключение 315
Литература 317

Михаил Федорович Глушко,
докт. техн. наук

Стальные подъемные канаты

Редактор издательства
Т. И. Чумаченко
Переплет художника
Ю. Б. Бабакова
Художественный редактор
Б. В. Валуенко
Технический редактор
В. Н. Куренной
Корректоры
А. К. Разумдочкая,
В. П. Оровецкая

Сдано в набор 22.IX 65. Подписано к печати 15.II 1966 г. Формат бумаги 84×108 1/32. Объем: 10.25. физ. л., 17,2. усл. п. л. 15,73. уч.-изд. л. Тираж 2100. БФ 01030. Цена 1 руб. 03 коп.

Издательство «Техніка». Киев 4. Пушкинская, 28.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. Фрунзе Комитета по печати при Совете Министров УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8, в Книжной типографии «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров УССР, Харьков, Пушкинская, 29. Зак. 347.